

西南大学附属中学 重庆外国语学校 重庆育才中学  
高 2024 届拔尖强基联盟高二下学期联合考试

数 学 试 题

(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

命题学校: 重庆外国语学校  
2023 年 4 月

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.
2. 答题卡答题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 若非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在答题卡对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持卷面整洁、完整.
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生保留, 以备评阅).

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2$ , 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3 - 2\Delta x)}{\Delta x} =$  B  $f'(x) = 2x, f(3) = 7$

- A. -12      B. -9      C. 9      D. 12

2. 某校开设 A 类选修课 4 门, B 类选修课 2 门, 每位同学从中选 3 门. 若要求两类课程中都至少选一门, 则不同的选法共有 B

- A. 14 种      B. 16 种      C. 20 种      D. 28 种

3. 4 位同学参加 3 个外语节目选拔, 每个同学恰选择一个节目参加, 则不同的参加方式有 A

- A.  $3^4$  种      B.  $4^3$  种      C.  $4^4$  种      D.  $3 \cdot 4^3$  种

4. 意大利数学家列昂那多·斐波那契以兔子繁殖为例, 引入“兔子数列”(斐波那契数列): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... 在实际生活中, 很多花朵 (如梅花, 飞燕草等) 的瓣数恰是斐波那契数列中的数, 斐波那契数列在物理及化学等领域也有着广泛的应用. 已知斐波那契数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , 若  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_n - 2$ , 则  $n =$  D

- A. 13      B. 14      C. 144      D. 233

5. 若函数  $f(x) = x^2 - a \ln x - x - 2023(a \in \mathbb{R})$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是 C

- A.  $(-\infty, 1]$       B.  $(-\infty, 1]$       C.  $(-\infty, -\frac{1}{8})$       D.  $(-\infty, -\frac{1}{8})$

$A_4^4 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1 = 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 1152$

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$24(40) = 960$

2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”和冬残奥会吉祥物“雪容融”, 有着可爱的外表和丰富的寓意, 深受全国人民的喜爱. 某商店有 4 个不同造型的“冰墩墩”吉祥物和 3 个不同造型的“雪容融”吉祥物展示在柜台上, 要求“雪容融”甲和“雪容融”乙相邻, 且均不与“雪容融”丙相邻的不同的排列方法总数为 B

- A. 480      B. 960      C. 1080      D. 1440

8. 若  $a = 2 \ln 1.1, b = 2 \tan 0.1, c = \sqrt{1.4}$ , 则 B

- A.  $c > a > b$       B.  $b > a > c$       C.  $c > b > a$       D.  $a > b > c$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1 = -5, a_{n+1} = a_n + 3$  则下列说法正确的是 ABD

- A.  $\{a_n\}$  是递增数列      B.  $\{S_n\}$  是递增数列      C.  $\{S_n\}$  是等差数列      D.  $S_n, S_{2n}, S_{3n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 成等差数列

10. 某校计划安排五位老师 (包含甲、乙) 担任周一至周五的值班工作, 每天都有老师值班, 且每人最多值班一天, 则下列说法正确的是 AC

- A. 若周一必须安排两位老师, 则不同的安排方法共有 60 种      B. 若周一必须安排两位老师, 则不同的安排方法共有 48 种

- C. 若甲、乙均值班且必须排在同一天值班, 则不同的安排方法共有 240 种      D. 若每天恰有一位老师值班, 且如果甲乙均值班, 则甲必须在乙之前值班的不同的安排方法共有 84 种

11. 已知直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = \ln(2 + x)$  与  $y = 2 + \ln x$  的公切线, 则下列说法正确的是 ABD

- A.  $k = 1$       B.  $k + b = 2$       C.  $k = 2$       D.  $k + b = 4$

12. 小明热爱数学, 《九章算术》、《几何原本》、《数学家的眼光》、《奥赛经典》、《高等数学》都是他的案头读物. 一日, 正翻阅《高等数学》, 一条关于函数的性质映入他的眼帘: 函数  $f(x)$  在区间  $I$  有定义, 且对  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ , 若恒有  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  是严格凹函数. 若  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f(x)$  在区间  $I = (0, +\infty)$  是严格凹函数.



上“严格下凸”，若恒有  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ，则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上“严格上凸”。现已

知函数  $f(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x - 2x - 1}$ ， $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数。下列说法正确的是

A.  $f'(x)$  有最小值，且最小值为整数

B. 存在常数  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，使得  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  “严格下凸”，在  $(x_0, +\infty)$  “严格上凸”

C.  $f(x)$  恰有两个极值点

D.  $f(x)$  恰有三个零点

注： $e$  为自然对数的底数， $e \approx 2.718$ ， $\ln 2 \approx 0.693$ 。

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  的单调递减区间是  $(0, 1)$ 。

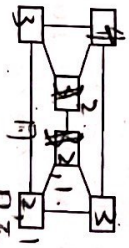
14. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $a_2 + a_4 = 8$ ， $S_5 = 27$ ，则  $nS_n$  的最大值为  $36$ 。

15. 当  $x \in (0, +\infty)$  时，函数  $y = e^x$  的图象在抛物线  $y = x^2 - ax + 1$  的上方，则实数  $a$  的取值范围是  $[-1, 2]$ 。

16. 如图，将 1, 2, 3, 4 四个数字填在 6 个“□”中，每个“□”中填一个数字，有连续连接的

$$\frac{b}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$



16 题图

$$C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 + C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 24 + 24 = 48$$

$$= n(n-1)2^{n-2}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$$

18. 已知函数  $f(x) = \frac{\log_2 x}{x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 在  $x = a$  处取得极值。

(1) 求实数  $a$  的值；

(2) 求  $f(x)$  在区间  $[t, t+1]$  ( $t > 0$ ) 上的最大值  $g(t)$ 。

$$\frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x \ln a}$$

19. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $-a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n = n^2$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ 。

$$(-1)^n a_n = n^2 - (n-1)^2$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

20. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + (a-1)x + 1$  ( $a \in \mathbb{R}$ )。

(1) 若  $f(x)$  的图象在  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $x + 2y + 1 = 0$  垂直，求实数  $a$  的值；

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(1) 求椭圆  $E$  的方程；

(2) 设点  $A$  为椭圆  $E$  上一点， $O$  为坐标原点，直线  $AO, AF_1$  交椭圆于  $B, C$  两点，试问： $\triangle ABC$  面积是否存在最大值？如果存在，请求出最大值；如果不存在，请说明理由。

22. 已知函数  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}ax^2}$  ( $a \in \mathbb{R}$ )。

(1) 讨论  $f(x)$  的极值点个数；

(2) 若  $x_1, x_2$  为  $f(x)$  的两个极值点，证明： $x_1 x_2 < 1$ 。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。其中，17 题 10 分，18, 19, 20, 21, 22 各 12 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ， $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$ ，数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 1$ ， $b_{n+1} = \frac{n+1}{n} b_n$ 。

(1) 求数列  $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$  的通项公式；

(2) 令  $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1} + a_n$ ，求  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

$$c_3 = \frac{1}{31} + 8$$

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+1}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$b_{6n} = \frac{7}{6} \cdot 6$$

$$c_1 = \frac{1}{3} + 2, c_2 = \frac{1}{15} + 4$$



西南大学附属中学 重庆外国语学校 重庆育才中学  
高 2024 届拔尖强基联盟高二下学期联合考试

数学试题参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	A	A	B	A	B	B	AB	ACD	AB	ACD

8. 解析: 易证: 当  $x \in (0, 1)$ ,  $\ln(1+x) < x < \tan x$ , 令  $x = 0.1$  有  $\ln 1.1 < \tan 0.1 < \tan 0.11$ .

故  $b > a$ . 令  $f(x) = 2\ln(1+x) + 1 - \sqrt{1+4x} (0 < x < 1)$ ,  $f'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}}$ .

由  $(1+x)^2 - (\sqrt{1+4x})^2 = x(x-2) < 0, \forall 0 < x < 1 \Rightarrow 1+x < \sqrt{1+4x} \Rightarrow f'(x) > 0$ .

$\therefore f(x)$  在  $(0, 1)$  单调递增.  $\therefore f(x) > f(0) = 0, \forall 0 < x < 1 \therefore f(0.1) > 0$ , 则  $a > c$ .

12. 解析:  $f(x) = e^x - \frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x - 2x - 1$ ,  $f'(x) = e^x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - 2$ .

$f''(x) = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$ , 令  $g(x) = x^2 e^x + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  单调递增.

$f'(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{4} - \ln 2 < 0, f'(1) = e > 0$ , 故存在唯一  $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$  使得  $f'(x_0) = 0$ , 且

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$  递减

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$  递增

$\therefore f'(x)$  存在最小值, 且  $f'_{\min}(x) = f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 2$ , 其中  $x_0$  满足

$$x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0 \text{ 即 } x_0 e^{x_0} = -\frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} e^{-\frac{1}{x_0}}, x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

又  $h(x) = xe^x$  在  $(0, +\infty)$  单调递增,  $h(x_0) = h\left(\ln \frac{1}{x_0}\right)$ ,  $x_0 > 0, \ln \frac{1}{x_0} > 0$ ,

$\therefore x_0 = \ln \left(\frac{1}{x_0}\right)$  即  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \Rightarrow f'(x_0) = -1$ , 故 A 正确.

由存在唯一  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  使得  $f'(x)$  在  $(0, x_0)$  单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  单调递增,

由导数的几何意义可知 B 错误.

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $f'(x) \rightarrow +\infty$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + 2\ln 2 - 4 < 0$ .

$f'(1) = e - 3 < 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty, f'(x) \rightarrow +\infty$ .

$\therefore f'(x)$  在  $(0, x_0)$  存在唯一零点  $x_1$ , 且  $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 在  $(x_0, +\infty)$  存在唯一零点

$x_2$ , 且  $x_2 \in (1, +\infty)$ .  $\therefore f(x)$  在  $(0, x_1)$  单调递增,  $(x_1, x_2)$  单调递减,  $(x_2, +\infty)$  单调递增, 故 C 正确.

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{1}{2}\ln^2 2 + \ln 2 - 2 > 1.6 + 0.7 - 0.25 - 2 > 0$ ,  $f(1) = e - 3 < 0$

当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 故 D 正确.

13.  $(-\infty, 0), (0, 1)$     14. 256    15.  $(2 - e, +\infty)$     16. 264

16. 解析: 第一步: 填方框 1, 2, 3, 共  $A_3^3 = 24$  种不同方法.

第二步: 填方框 4, 5, 6.

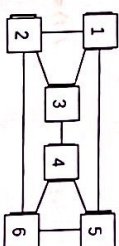
不妨设方框 1, 2, 3 分别填数字 1, 2, 3 如图, 分为三类:

第一类: 方框 4 填 1, 易知有 4 种不同填法;

第二类: 方框 4 填 2, 同第一类共 4 种不同填法;

第三类: 方框 4 填 3, 易知有 3 种不同填法. 共 11 种不同填法

故共有  $24 \times 11 = 264$  种不同填法.



16 题图

17. 解: (1) 设数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 由题:  $a_n q^2 = 4(a_n q - a_n), a_n \neq 0$ ,

$$\therefore (q-2)^2 = 0 \Rightarrow q = 2, \therefore a_n = 2^n, \text{-----} 2 \text{分}$$

又  $\frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{b_n}{n} \Rightarrow \left\{ \frac{b_n}{n} \right\}$  是首项为  $b_1 = 1$  的常数列, 故  $\frac{b_n}{n} = 1$  即  $b_n = n$  ----- 5分

$$(2) c_n = \frac{1}{4n^2-1} + 2^n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + 2^n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + 2^n \text{-----} 7 \text{分}$$

$$T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2n+1} \right] + \frac{2^n(1-2^n)}{1-2} \text{-----} 10 \text{分}$$

$$= \frac{n}{2n+1} + 2^{n+1} - 2$$

18. 解: (1)  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \cdot x - \log_a x$ , 则  $f'(a) = \frac{1}{\ln a} - \log_a a$   
 $\frac{1}{a^2} = 0 \Rightarrow a = e$  ----- 3分

此时,  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Rightarrow 0 < x < e, f'(x) < 0 \Rightarrow x > e$ .

$\therefore f(x)$  在  $(0, e)$  单调递增, 在  $(e, +\infty)$  单调递减

$\therefore f(x)$  在  $x = e$  处取得极大值, 符合题意.  $a = e$  ----- 6分

(2) (i) 当  $t+1 \leq e$  即  $0 < t \leq e-1$  时,  $f(x)$  在区间  $[t, t+1]$  单调递增,

$$\text{则 } f_{\max}(x) = f(t+1) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}; \text{-----} 8 \text{分}$$

(ii) 当  $t < e < t+1$  即  $e-1 < t < e$  时,  $f_{\max}(x) = f(e) = \frac{1}{e}$  ----- 10分

(iii) 当  $t \geq e$  时,  $f(x)$  在区间  $[t, t+1]$  单调递减,  $f_{\max}(x) = f(t) = \frac{\ln t}{t}$

$$\text{综上: } f_{\max}(x) = g(t) = \begin{cases} \frac{\ln(t+1)}{t+1}, & 0 < t \leq e-1 \\ \frac{1}{e}, & e-1 < t < e \\ \frac{\ln t}{t}, & t \geq e \end{cases} \text{-----} 12 \text{分}$$

19. 解: (1) 由题:  $-a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} = (n-1)^2 (n \geq 2)$  ----- 2分

则  $(-1)^n a_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 (n \geq 2) \Rightarrow a_n = (-1)^n (2n-1) (n \geq 2)$  ----- 4分

又  $-a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = -1$  满足上式, 故  $a_n = (-1)^n (2n-1)$  ----- 6分

(2) (i) 当  $n$  为偶数时,  $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - \dots - (2n-3) + (2n-1) = n$  ----- 9分

(ii) 当  $n$  为奇数时,  $S_n = S_{n-1} - a_{n-1} = (n+1) - (2n+1) = -n$  ----- 11分

$$\therefore S_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数} \\ -n, & n \text{ 为奇数} \end{cases} = (-1)^n \cdot n \text{-----} 12 \text{分}$$

20. 解: (1) 由题:  $f'(x) = ax^2 - x + a - 1, f'(1) = 2a - 2 = 2$ , 则  $a = 2$ . ----- 3分

$$(2) f'(x) = ax^2 - x + a - 1 (x \geq 2)$$

(i) 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0, \forall x \geq 2 \Rightarrow f(x)$  在  $[2, +\infty)$  单调递减; ----- 5分

(ii) 当  $0 < a < \frac{3}{5}$  时,  $f'(x)$  开口向上,  $f'(2) = 5a - 3 < 0$ ,

$$\text{则 } f'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1 + \sqrt{4a^2 + 4a + 1}}{2a},$$

且当  $x \in [2, x_0)$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减;

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0, f(x)$  单调递增. ----- 9分

(iii) 当  $a \geq \frac{3}{5}$  时,  $f'(x)$  开口向上, 对称轴  $x = \frac{1}{2a} < 2, f'(x)$  在  $[2, +\infty)$  单调,

$\therefore$  当  $x \geq 2$  时,  $f'(x) \geq f(2) \geq 5a - 3 \geq 0 \therefore f(x)$  在  $[2, +\infty)$  单调递增.

综上: 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  单调递减;

当  $0 < a < \frac{3}{5}$  时,  $f(x)$  在  $[2, \frac{1 + \sqrt{4a^2 + 4a + 1}}{2a})$  单调递减, 在