西南大学附属中学　　重庆外国语学校　　重庆育才中学

高 2024 届拔尖强基联盟高二下半期联合考试

数学试题参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	A	A	B	A	B	B	AB	ACD	AB	ACD

8. 解析：易证：当 $x\in(0,1)$，$\ln(1+x)<x<\tan x$.令 $x=0.1$ 有 $\ln 1.1<\tan 0.1<\tan 0.11$.

故 $b>a$. 令 $f(x)=2\ln(1+x)+1-\sqrt{1+4x}(0<x<1)$ ，$f'(x)=\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{2}{\sqrt{1+4x}}$ ，

由 $(1+x)^2-(\sqrt{1+4x})^2=x(x-2)<0,\forall 0<x<1\Rightarrow 1+x<\sqrt{1+4x}\Rightarrow f'(x)>0.$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增 $\therefore f(x)>f(0)=0,\forall 0<x<1$.$\therefore f(0.1)>0$,即 $a>c$.

12. 解析：$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}\ln^2x-\ln x-2x-1$，$f'(x)=e^x-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}-2$.

$f''(x)=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$,令 $t(x)=x^2e^x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$t\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{4}-\ln 2<0,t(1)=e>0$ ，故存在唯一 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得 $t(x_0)=0$ ，且

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$t(x)<0\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f'(x)$ 递减

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$t(x)>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$ 递增

$\therefore f'(x)$ 存在最小值，且 $f'_{\min}(x)=f'(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}-2$ ，其中 x_0 满足

$x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$ 即 $x_0e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}=\ln\dfrac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$ ，$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

又 $h(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$h(x_0)=h\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$，$x_0>0,\ln\dfrac{1}{x_0}>0$ ，

$\therefore x_0=\ln\left(\dfrac{1}{x_0}\right)$ 即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow f'(x_0)=-1$,故 A 正确.

由存在唯一 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，

由导数的几何意义可知 B 错误.

当 $x \to 0^+$ 时，$f'(x) \to +\infty$，$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + 2\ln 2 - 4 < 0,$

$f'(1) = e - 3 < 0,$ 当 $x \to +\infty, f'(x) \to +\infty.$

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 存在唯一零点 x_1，且 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，在 $(x_0, +\infty)$ 存在唯一零点 x_2，且 $x_2 \in (1, +\infty)$. $\therefore f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 单调递增，(x_1, x_2) 单调递减，$(x_2, +\infty)$ 单调递增，故 C 正确.

当 $x \to 0^+$ 时，$f(x) \to -\infty$，

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{1}{2}\ln^2 2 + \ln 2 - 2 > 1.6 + 0.7 - 0.25 - 2 > 0$，$f(1) = e - 3 < 0$

当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$，故 D 正确.

13. $(-\infty, 0), (0, 1)$ 14． 256 15． $(2 - e, +\infty)$ 16． 264

16. 解析：第一步：填方框 1，2，3，共 $A_4^3 = 24$ 种不同方法.

第二步：填方框 4，5，6.

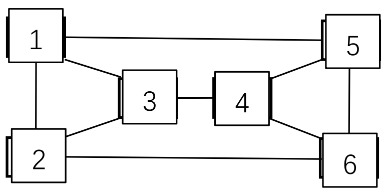
不妨设方框 1，2，3 分别填数字 1，2，3 如图，分为三类：

第一类：方框 4 填 1，易知有 4 种不同填法；

第二类：方框 4 填 2，同第一类共 4 种不同填法；

第三类：方框 4 填 4，易知有 3 种不同填法. 共 11 种不同填法

故共有 $24 \times 11 = 264$ 种不同填法.



16 题图

17. 解（1）设数列$\{a_n\}$的公比为q，由题: $a_nq^2=4(a_nq-a_n), a_n\neq 0$，

$\therefore (q-2)^2=0\Rightarrow q=2$. $\therefore a_n=2^n$. --2 分

又$\dfrac{b_{n+1}}{n+1}=\dfrac{b_n}{n}\Rightarrow\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$是首项为$b_1=1$的常数列. 故$\dfrac{b_n}{n}=1$即$b_n=n$-----------5 分

（2）$c_n=\dfrac{1}{4n^2-1}+2^n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+2^n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})+2^n$ ------7 分

$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]+(2^1+2^2+\cdots+2^n)$

$=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{2n+1}\right]+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}$ --10 分

$=\dfrac{n}{2n+1}+2^{n+1}-2$

18. 解：（1）$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x\ln a}\cdot x-\log_a x}{x^2}$，则$f'(a)=\dfrac{\frac{1}{\ln a}-\log_a a}{a^2}=0\Rightarrow a=e$-------3 分

此时，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0\Rightarrow 0<x<e; f'(x)<0\Rightarrow x>e.$

$\therefore f(x)$在$(0,e)$单调递增，在$(e,+\infty)$单调递减

$\therefore f(x)$在$x=e$处取得极大值，符合题意.$\therefore a=e$ --------------------6 分

（2）（i）当$t+1\leq e$即$0<t\leq e-1$时，$f(x)$在区间$[t,t+1]$单调递增，

则$f_{\max}(x)=f(t+1)=\dfrac{\ln(t+1)}{t+1}$； -------------------------------------8 分

（ii）当$t<e<t+1$即$e-1<t<e$时，$f_{\max}(x)=f(e)=\dfrac{1}{e}$；-----------10 分

（iii）当$t\geq e$时，$f(x)$在区间$[t,t+1]$单调递减，$f_{\max}(x)=f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$

综上：$f_{\max}(x)=g(t)=\begin{cases}\dfrac{\ln(t+1)}{t+1}, & 0<t\le e-1\\ \dfrac{1}{e}, & e-1<t<e\\ \dfrac{\ln t}{t}, & t\ge e\end{cases}$ ------------------12 分

19. 解：（1）由题：$-a_1+a_2-a_3+\dots+(-1)^{n-1}a_{n-1}=(n-1)^2(n\ge 2)$ ------------------2 分

则 $(-1)^n a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\ge 2)\Rightarrow a_n=(-1)^n(2n-1)(n\ge 2)$ --4 分

又 $-a_1=1\Rightarrow a_1=-1$ 满足上式，故 $a_n=(-1)^n(2n-1)$ ------------------6 分

（2）（i）当 n 为偶数时，$S_n=-1+3-5+7-\dots-(2n-3)+(2n-1)=n$ ------9 分

（ii）当 n 为奇数时，$S_n=S_{n+1}-a_{n+1}=(n+1)-(2n+1)=-n$ ------------11 分

$\therefore S_n=\begin{cases}n, & n\text{为偶数}\\ -n, & n\text{为奇数}\end{cases}\left(=(-1)^n\cdot n\right)$ ------------------------------------12 分

20. 解：（1）由题：$f'(x)=ax^2-x+a-1$，$f'(1)=2a-2=2$，则 $a=2.$ ------------3 分

（2）$f'(x)=ax^2-x+a-1(x\ge 2)$

（i）当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0,\forall x\ge 2\Rightarrow f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递减；------------5 分

（ii）当 $0<a<\dfrac{3}{5}$ 时，$f'(x)$ 开口向上，$f'(2)=5a-3<0$，

则 $f'(x)=0\Rightarrow x_0=\dfrac{1+\sqrt{-4a^2+4a+1}}{2a}$，

且当 $x\in[2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.------------------------------9 分

（iii）当 $a\ge\dfrac{3}{5}$ 时，$f'(x)$ 开口向上，对称轴 $x=\dfrac{1}{2a}<2$，$f'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单增，

$\therefore$ 当 $x\ge 2$ 时，$f'(x)\ge f(2)\ge 5a-3\ge 0$ $\therefore f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递增.

综上：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递减；

当 $0<a<\dfrac{3}{5}$ 时，$f(x)$ 在 $[2,\dfrac{1+\sqrt{-4a^2+4a+1}}{2a})$ 单调递减，在

$(\frac{1+\sqrt{-4a^2+4a+1}}{2a},+\infty)$ 单调递增

当 $a\geq\frac{3}{5}$ 时，$f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递增.----------------------------------12 分

21. 解：（1）$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．--------------------------------------4 分

（2）设 AF_2 的方程为 $x=ty+\sqrt{3}$，$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=ty+\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow(t^2+4)y^2+2\sqrt{3}ty-1=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则：$\begin{cases}\Delta>0\\ y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{3}t}{t^2+4}\\ y_1y_2=\frac{-1}{t^2+4}\end{cases}$，--------------------------------------6 分

$\because O$ 为 AB 的中点，$\therefore S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta OAC}=2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\left|y_1-y_2\right|=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{t^2+1}{\left(t^2+4\right)^2}}$ ————9 分

令 $m=t^2+1\left(m\geq1\right)$ $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{m}{\left(m+3\right)^2}}=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{m+\frac{9}{m}+6}}\leq4\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{9}{m}}+6}}=2$

当且仅当 $m=3$ 时，ΔABC 面积的最大值为 2．————————————————-12 分

22. 解：（1）$f'\left(x\right)=e^x-ax$ 最大值

（i）当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=e^x$ 在 R 上单调递增，无极值点；

（ii）当 $a\neq0$ 时，$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{x}{e^x}=g(x)$

$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0\Leftrightarrow x<1\Rightarrow g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，$(1,+\infty)$ 单调递减；

$g_{\max}(x)=g(1)=\frac{1}{e}$，当 $x\to-\infty,g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty,g(x)\to0^+$

①当 $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{e}$ 即 $0<a\leq e$ 时，$\frac{1}{a}\geq\frac{x}{e^x}$ 即 $e^x\geq ax$ 即 $f'(x)\geq0$

$\therefore f(x)$ 在 R 上单调递增，无极值点；

②当$0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$即$a>e$时，设$\frac{1}{a}=\frac{x}{e^x}$的两根为$x_1,x_2(x_1<x_2)$

则当$x\in(-\infty,x_1)$时，$\frac{1}{a}>\frac{x}{e^x}$即$e^x>ax$即$f'(x)>0$ $\therefore f(x)$单调递增；

同理已知$f(x)$在$\left(x_1,x_2\right)$单调递减，在$\left(x_2,+\infty\right)$单调递增, 此时$f(x)$恰有两个极值点；

③当$\frac{1}{a}<0$即$a<0$时，$\frac{1}{a}=\frac{x}{e^x}$有唯一实根（设为$x_0$）易知$f(x)$在$\left(-\infty,x_0\right)$单调递减，在$\left(x_0,+\infty\right)$单调递增，此时$f(x)$恰有一个极值点.

综上：当$a<0$时，$f(x)$恰有一个极值点；

当$0\le a\le e$时，$f(x)$无极值点；

当$a>e$时，$f(x)$恰有两个极值点.------------------------—----6 分

（2）解法一：由题及（1）知，$a>e$且$x_1,x_2(x_1<x_2)$为$\frac{1}{a}=\frac{x}{e^x}=g(x)$的两根，且

$0<x_1<1<x_2$. 要证$x_1x_2<1$即证$x_1<\frac{1}{x_2}$.又$0<x_1<1,0<\frac{1}{x_2}<1,$ $g(x)$在$(-\infty,1)$单调递增，故只需证$g(x_1)<g\left(\frac{1}{x_2}\right)$. 又$g(x_1)=g(x_2)$，故只要证$g(x_2)<g\left(\frac{1}{x_2}\right),x_2>1$. --8 分

令$h(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)-g(x)(x>1)$，$h'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)g'\left(\frac{1}{x}\right)-g'(x)=\frac{(x-1)(x^3e^{\frac{1}{x}-x}-1)}{x^3e^{\frac{1}{x}}}(x>1)$，

令$t(x)=x^3e^{\frac{1}{x}-x}-1(x>1),t'(x)=-xe^{\frac{1}{x}-x}(x^2-3x+1)$

$\therefore t(x)$在$\left(1,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$单调递增，在$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$单调递减，

且$t(1)=0,$当$x\to+\infty$，$t(x)\to-1$ $\therefore$存在唯一$x_0>1$使得$t(x_0)=0.$

当$x\in(1,x_0)$时，$t(x)>0$ $\therefore h'(x)>0$ $\therefore h(x)$单调递增；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$t(x)<0$ $\therefore h'(x)<0$ $\therefore h(x)$单调递减；

又$h(1)=0$，当$x\to+\infty$，$h(x)\to0^+$ $\therefore h(x)>0,\forall x>1$.命题得证.----------------12 分

解法二：由题：$\begin{cases} e^{x_1} = ax_1 \\ e^{x_2} = ax_2 \end{cases}$ 其中 $0 < x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow e^{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2}{x_1} = t > 1 \Rightarrow x_2 = tx_1, x_2 - x_1 = \ln t$

即 $tx_1 - x_1 = \ln t \Rightarrow x_1 = \dfrac{\ln t}{t-1}$.

$$x_1 x_2 < 1 \Leftrightarrow tx_1^2 < 1 \Leftrightarrow t\left(\frac{\ln t}{t-1}\right)^2 < 1(t>1) \Leftrightarrow \sqrt{t}\frac{\ln t}{t-1} < 1(t>1) \Leftrightarrow \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \ln t > 0(t>1)$$

--9 分

令 $F(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}} - \ln t(t>1), F'(t) = \dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2\sqrt{t^3}} > 0 \therefore F(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore F(t) > F(1) = 0, \forall t > 1$. 命题得证.---12 分