

西南大学附属中学 重庆外国语学校 重庆育才中学

高 2024 届拔尖强基联盟高二下半期联合考试

数 学 试 题

(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

命题学校: 重庆外国语学校  
2023 年 4 月

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整.
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生保存, 以备评讲).

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2$ , 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3 - 2\Delta x)}{\Delta x} =$   
A. -12                      B. -9                      C. 9                      D. 12
2. 某校开设 A 类选修课 4 门, B 类选修课 2 门, 每位同学从中选 3 门. 若要求两类课程中都至少选一门, 则不同的选法共有  
A. 14 种                      B. 16 种                      C. 20 种                      D. 28 种
3. 4 位同学参加 3 个外语节目选拔, 每个同学恰选择一个节目参加, 则不同的参加方式有  
A.  $3^4$  种                      B.  $4^3$  种                      C.  $A_4^3$  种                      D.  $3A_3^3$  种
4. 意大利数学家列昂那多·斐波那契以兔子繁殖为例, 引入“兔子数列”(斐波那契数列): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., 在实际生活中, 很多花朵 (如梅花, 飞燕草等) 的瓣数恰是斐波那契数列中的数, 斐波那契数列在物理及化学等领域也有着广泛的应用. 已知斐波那契数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ , 若  $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = a_m - 2$ , 则  $m =$   
A. 13                      B. 14                      C. 144                      D. 233
5. 若函数  $f(x) = x^2 - a \ln x - x - 2023 (a \in R)$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是  
A.  $(-\infty, 1)$                       B.  $(-\infty, 1]$                       C.  $(-\infty, -\frac{1}{8})$                       D.  $(-\infty, -\frac{1}{8}]$

6. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3a^2x + 1 (a > 0)$  恰有两个零点, 则  $a =$
- A.  $2^{-\frac{1}{3}}$                       B.  $2^{\frac{1}{3}}$                       C.  $2^{-\frac{2}{3}}$                       D.  $2^{\frac{2}{3}}$
7. 2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”和冬残奥会吉祥物“雪容融”, 有着可爱的外表和丰富的寓意, 深受各国人民的喜爱. 某商店有 4 个不同造型的“冰墩墩”吉祥物和 3 个不同造型的“雪容融”吉祥物展示在柜台上, 要求“雪容融”甲和“雪容融”乙相邻, 且均不与“雪容融”丙相邻的不同的排列方法总数为
- A. 480                      B. 960                      C. 1080                      D. 1440
8. 若  $a = 2\ln 1.1 + 1$ ,  $b = 2\tan 0.11 + 1$ ,  $c = \sqrt{1.4}$ , 则
- A.  $c > a > b$                       B.  $b > a > c$                       C.  $c > b > a$                       D.  $a > b > c$

**二、多项选择题:** 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1 = -5$ ,  $a_{n+1} = a_n + 3$  则下列说法正确的是
- A.  $\{a_n\}$  是递增数列                      B. 数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是递增数列
- C. 数列  $\{S_n\}$  中的最小项为  $S_3$                       D.  $S_m, S_{2m}, S_{3m} (m \in \mathbb{N}^*)$  成等差数列
10. 某校计划安排五位老师 (包含甲、乙) 担任周一至周五的值班工作, 每天都有老师值班, 且每人最多值班一天, 则下列说法正确的是
- A. 若周一必须安排两位老师, 则不同的安排方法共有 60 种
- B. 若甲、乙均值班且必须排在同一天值班, 则不同的安排方法共有 48 种
- C. 若五位老师都值班一天, 则不同的安排方法共有 240 种
- D. 若每天恰有一位老师值班, 且如果甲乙均值班, 则甲必须在乙之前值班的不同的安排方法共有 84 种
11. 已知直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = \ln(2 + x)$  与  $y = 2 + \ln x$  的公切线, 则下列说法正确的是
- A.  $k = 1$                       B.  $k + b = 2$                       C.  $k = 2$                       D.  $k + b = 4$
12. 小明热爱数学, 《九章算术》、《几何原本》、《数学家的眼光》、《奥赛经典》、《高等数学》都是他的案头读物. 一日, 正翻阅《高等数学》, 一条关于函数的性质映入他的眼帘: 函数  $f(x)$  在区间  $I$  有定义, 且对  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ , 若恒有  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$

有定义, 且对  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ , 若恒有  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ , 则称函数  $f(x)$  在区间  $I$

上“严格下凸”；若恒有  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ，则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上“严格上凸”. 现已

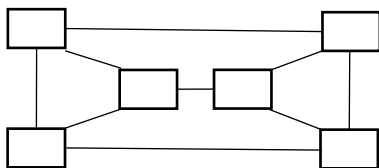
知函数  $f(x) = e^x - \frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x - 2x - 1$ ， $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数，下列说法正确的是

- A.  $f'(x)$  有最小值，且最小值为整数
- B. 存在常数  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，使得  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  “严格下凸”，在  $(x_0, +\infty)$  “严格上凸”
- C.  $f(x)$  恰有两个极值点
- D.  $f(x)$  恰有三个零点

注： $e$  为自然对数的底数， $e \approx 2.718$ ， $\ln 2 \approx 0.693$ .

### 三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  的单调递减区间是\_\_\_\_\_.
14. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $a_2 + a_7 = 8$ ， $S_9 = 27$ ，则  $nS_n$  的最大值为\_\_\_\_\_.
15. 当  $x \in (0, +\infty)$  时，函数  $y = e^x$  的图象恒在抛物线  $y = x^2 - ax + 1$  的上方，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 如图，将 1, 2, 3, 4 四个数字填在 6 个“ $\square$ ”中，每个“ $\square$ ”中填一个数字，有线段连接的两个“ $\square$ ”不能填相同数字，四个数字不必均使用，则不同填数方法有\_\_\_\_\_种.



16 题图

### 四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 其中，17 题 10 分，18, 19, 20, 21, 22 各 12 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ， $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$ ，数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 1$ ， $b_{n+1} = \frac{n+1}{n}b_n$ .
  - (1) 求数列  $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$  的通项公式；
  - (2) 令  $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1} + a_n$ ，求  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. 已知函数  $f(x) = \frac{\log_a x}{x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 在  $x = a$  处取得极值.

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 求  $f(x)$  在区间  $[t, t+1]$  ( $t > 0$ ) 上的最大值  $g(t)$ .

19. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $-a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n = n^2$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

20. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + (a-1)x + 1$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 若  $f(x)$  的图象在  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $x + 2y + 1 = 0$  垂直, 求实数  $a$  的值;

(2) 讨论  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  上的单调性.

21. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 右焦点  $F_2(\sqrt{3}, 0)$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 设点  $A$  为椭圆  $E$  上一点,  $O$  为坐标原点, 直线  $AO, AF_2$  交椭圆于  $B, C$  两点, 试问:  $\triangle ABC$  面积是否存在最大值? 如果存在, 请求出最大值; 如果不存在, 请说明理由.

22. 已知函数  $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ax^2$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 讨论  $f(x)$  的极值点个数;

(2) 若  $x_1, x_2$  为  $f(x)$  的两个极值点, 证明:  $x_1 x_2 < 1$ .