



# 2023 年新高考适应性测试（全真模拟卷）

## 数 学 试 题

（满分：150 分；考试时间：120 分钟）

2023 年 5 月

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔填涂；答非选择题时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写；必须在题号对应的答题区域内作答，超出答题区域书写无效；保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后，将答题卡交回（试题卷学生保存，以备评讲）。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = 1 + i$ ，则  $|2z + \bar{z}| =$  ( )  
 A.  $\sqrt{5}$                       B.  $\sqrt{10}$                       C.  $2\sqrt{5}$                       D.  $2\sqrt{10}$
2. 已知集合  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合  $B = \{x | |x+1| < 2\}$ ，则  $A \cap B =$  ( )  
 A.  $\{-1, 0, 1\}$               B.  $\{-1, 0, 1, 2\}$               C.  $\{-2, -1, 0\}$               D.  $\{0, 1, 2, 3\}$
3. 已知向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  满足： $|\vec{a}| = 1$ ， $\vec{b}$  在  $\vec{a}$  方向上的投影向量为  $-2\vec{a}$ ，则  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$  ( )  
 A. -2                          B. 4                              C. -2                              D. -4
4. 有 5 辆车停放 6 个并排车位，货车甲车体较宽，停靠时需要占两个车位，并且乙车不与货车甲相邻停放，则共有 ( ) 种停放方法  
 A. 72                          B. 144                          C. 108                          D. 96

5. 牛顿提出：二项式定理可以推广到任意实数次幂，即广义二项式定理：对于任意实数  $x$ ， $(1+a)^x = 1 + \frac{x}{1!} \cdot a + \frac{x(x-1)}{2!} \cdot a^2 + \dots + \frac{x(x-1) \cdots (x-k+1)}{k!} \cdot a^k + \dots$ ，当  $|a|$  比较小的时候，取广义二项式定理的展开式的前两项可得： $(1+a)^x \approx 1 + x \cdot a$ ，并且  $|a|$  的值越小，所得结果就越接近真实数据。用这个方法计算  $\sqrt{5}$  和  $\sqrt[3]{9}$  的近似值，可以这样操作：

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4 \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \approx 2 \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) = 2.250,$$

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8-1} = \sqrt[3]{8 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right)} = 2\sqrt[3]{1 - \frac{1}{8}} \approx 2 \times \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{8}\right) = \frac{23}{12} \approx 1.917,$$

新高考适应性测试（全真模拟卷） 数学 第 1 页（共 6 页）

用这样的方法, 估计  $\sqrt[3]{28}$  的近似值为 ( )

- A. 3.036                      B. 3.037                      C. 3.038                      D. 3.039

6. 有一种超声驱蚊器, 可以驱赶空间中一定半径内的蚊虫, 有一个室内空间为正四棱锥的展览馆, 高 18 米, 底面正方形边长  $12\sqrt{2}$  米, 若想安装一台超声驱蚊器就使整个展览馆都处于驱蚊范围内, 则驱蚊器的有效驱蚊半径至少为 ( )

- A. 10 米                      B.  $8\sqrt{2}$  米                      C. 12 米                      D. 13 米

7. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x, y \in \mathbf{R})$ ,  $f(2)=4$ , 则  $f(100)=$  ( )

- A. 9999                      B. 10000                      C. 10201                      D. 10202

8. 函数  $f(x)=2x-\frac{b}{x}$  ( $b$  为大于 0 的常数) 的图象 ( )

- A. 是双曲线, 离心率为  $\sqrt{10+4\sqrt{5}}$                       B. 是双曲线, 离心率为  $\sqrt{10-4\sqrt{5}}$   
C. 是双曲线, 离心率与常数  $b$  有关                      D. 不一定是双曲线

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n=2a_n-2$ ,  $b_n=\log_2 a_{2n}$ , 则 ( )

- A.  $a_2=$                       B.  $\{b_n\}$  是等差数列  
C.  $S_n, S_{2n}, S_{3n}$  成等比数列                      D.  $\{a_{2n}\}$  的前  $n$  项和为  $\frac{4^{n+1}-4}{3}$

10. 已知函数  $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$  ( $\omega>0, 0<|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ) 的图象有两条相邻的对称轴  $x=-\frac{\pi}{3}$  与

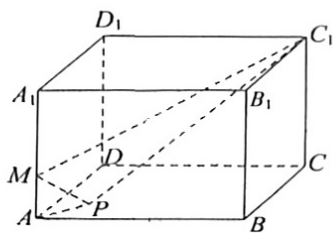
$x=\frac{\pi}{6}$ , 则下列选项正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$                       B.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{6}, 0)$  对称  
C.  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的值域为  $[-1, 2]$                       D.  $f(x)$  的图象在  $x=\frac{\pi}{3}$  处的切线斜率为  $-2$

11. 若  $x > 0, y > 0$ , 且  $2x + y = 1$ , 则下列不等式中一定成立的是 ( )

- A.  $y^2 - x^2 < 1$       B.  $y^2 + 2x^2 \geq \frac{1}{3}$       C.  $\frac{2y-1}{x+1} > 0$       D.  $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x} > 3$

12. 若正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面棱长为 4, 侧棱长为  $2\sqrt{2}$ ,  $M$  为棱  $AA_1$  上一点, 且  $|MA| = 1$ , 点  $P$  在正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的表面上运动, 且满足  $P$  到  $A_1$  的距离比  $P$  到  $A$  的距离大 2, 则下列结论正确的是 ( )



- A. 点  $P$  在底面  $ABCD$  内的轨迹长度为  $\frac{\pi}{2}$
- B. 线段  $PC_1$  长度可以为  $2\sqrt{10} - 1$
- C.  $P$  点在底面  $ABCD$  内时, 存在这样的点  $P$  使得  $\angle MPC_1 = 120^\circ$
- D. 四面体  $P-A_1CD_1$  的体积取值范围为  $\left[4\sqrt{2}, \frac{16\sqrt{2}}{3}\right]$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 二项式  $(x - \frac{2}{x})^5$  的展开式中,  $x$  项的系数为 \_\_\_\_\_

14. 一批产品中“一等品”的占有率为 20%, 现从该批产品中有放回地抽取 10 次, 每次抽取 1 件, 若用  $X$  表示抽到“一等品”的件数, 则  $E(X) =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知  $F$  为抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点, 点  $R(5, 0)$  在焦点  $F$  的右侧,  $PQ$  为一条过  $F$  的弦, 当  $\triangle PFR$  为正三角形时,  $|PQ| =$  \_\_\_\_\_.

16. 若曲线  $f(x) = x^3 - x$  与曲线  $g(x) = x^2 + a$  存在公切线, 则  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，已知  $a_1 = 1$ 。

(1) 若  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^+$ ，求证： $a_n < 2$ ；

(2) 若  $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$  是公差为  $\frac{1}{3}$  的等差数列，求数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

18. (12 分) 在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ， $c = \frac{\sqrt{5}}{5}b$ ，过点  $B$  作角  $B$  的平分线与边  $AC$  交于点  $D$ 。

(1) 当角  $C$  最大时，求  $\frac{b}{a}$  的值；

(2) 在(1)条件下，若  $BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积。

19. (12 分) 《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》指出：“健康体魄是青少年为祖国和人民服务的基本前提，是中华民族旺盛生命力的体现。”为培养学生养成良好的体育运动习惯，高三年级在全年级抽取了 10 位同学进行综合体育测试，得到这 10 位同学的成绩如下表所示：

序号 $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
成绩 $x_i$ (分)	44	58	64	80	41	51	74	54	56	38

记这 10 位学生的成绩均分与标准差分别为  $\bar{x}, s$ 。经计算， $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 33050$ 。

- (1) 求平均成绩  $\bar{x}$  和标准差  $s$ ；
- (2) 若规定体质测试成绩低于 50 分的学生为“体育锻炼有待加强”者，从这 10 位学生中任取 3 位，记测试成绩不合格的人数为  $\xi$ ，求  $\xi$  的分布列；

经统计，全市所有高三学生综合体育测试成绩近似服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ 。若从全市所有高三学生中抽查 100 名高中生进行测试，用(1)中得到的  $\bar{x}, s^2$  的值分别作为  $\mu, \sigma^2$  的近似值，记这 100 位学生的成绩恰好落在区间  $[43, 82)$  中的人数为  $X$ ，求  $X$  的数学期望  $E(X)$ 。

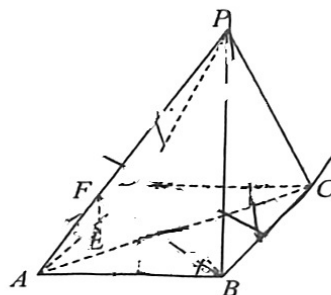
附：若  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ，

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545, \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973.$$

20. (12 分) 如图，已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是菱形，平面  $PBC \perp$  平面  $ABCD$ ， $\angle ACD = 30^\circ$ 。E 为 AD 的中点，F 在棱 PA 上，且满足  $PC \parallel$  平面 BEF。

- (1) 求  $\frac{FP}{FA}$  的值。

- (2) 若  $\angle PDC = \angle PDB$ ，且 PD 与平面 ABCD 所成的角为  $60^\circ$ ，求平面 AEF 与平面 BEF 夹角的余弦值。





21. (12 分) 定义  $x^2 + y^2 = b^2$  为椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的“内涵”圆. 若椭圆  $C_1$  的右焦点  $F_2$  的坐标为  $(2, 0)$ , 点  $P$  为“内涵”圆上不在  $y$  轴上的一动点, 过点  $P$  作椭圆  $C_1$  “内涵”圆的切线交  $C_1$  于  $M, N$  两点, 当点  $P$  运动到  $x$  轴时,  $|MN| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ .

- (1) 求椭圆  $C_1$  的标准方程;
- (2) 求  $\triangle MF_2N$  周长的取值范围.



22. (12 分) 已知函数  $f(x) = 2e^{x-1} - ax \ln x$ .

- (1) 当  $a = 2$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 当  $x \in [1, \pi + 1]$  时,  $f(x) \geq \cos(x-1) - (a-2)(x-1) + 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;
- (3) 证明: 当  $n \in \mathbb{N}^*$  时, 有  $\sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \cdots + \sin \frac{1}{2n} \leq \ln 2$ .