

# 2023 年大连市高三适应性测试参考答案与评分标准

## 数学

说明：

一、本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对解答题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

### 一. 单项选择题：

1. (B) 2. (B) 3. (C)  
4. (D)

解：由题意可知  $\vec{AB} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ ，把点  $B$  绕点  $A$  逆时针方向旋转  $\frac{7\pi}{4}$ ，得到点  $P$ ，

设  $P(x, y)$ ，则  $\vec{AP} = \left( \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{4} + 2\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{4}, \sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{4} - 2\sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{4} \right) = (-1, -3)$ ，

所以  $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-2=-3 \end{cases}$ ，解得  $x=0$ ， $y=-1$ ，

所以点  $P$  的坐标为  $(0, -1)$ ，故选：D.

5. (B)

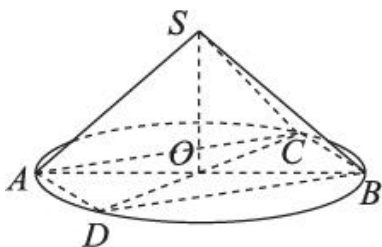
解： $\bar{x} = 3.5, \bar{y} = 36.5$ ，由回归方程过点  $(\bar{x}, \bar{y})$ ，故  $36.5 = 9 \times 3.5 + a$ ，得  $a = 5$ ，

即  $\hat{y} = 9x + 5$ 。

当  $x = 6$  时， $\hat{y} = 9 \times 6 + 5 = 59$ ，所以最接近的是 60，故选：B.

6. (C)

解：如图，连接  $AD, BC, AC, SC$ 。



因为  $O$  为  $AB, CD$  中点，且  $AB = CD$ ，所以四边形  $ADBC$  为矩形，  
所以  $DB \parallel AC$ ，所以  $\angle SAC$  或其补角为异面直线  $SA$  与  $BD$  所成的角。

设圆  $O$  的半径为 1，则  $SA = SC = \sqrt{2}$ 。因为  $\angle AOD = \frac{\pi}{3}$ ，所以  $\angle ADO = \frac{\pi}{3}$ 。

在直角  $\triangle DAC$  中， $CD = 2$ ，得  $AC = \sqrt{3}$ 。所以  $\cos \angle SAC = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，

所以异面直线SA与BD所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ . 故选: C.

7. (D)

解: 方法一

令 $x=0$ , 有 $f(-y)f(y)=f^2(0)$ ,

因为 $f(x)+f(-x)\geq 2\sqrt{f(x)f(-x)}=2f(0)$ ,

所以 $f(0)=1$ ,

因为 $f(x-y)f(x+y)=f^2(x)$ ,

所以 $\frac{f(x+y)}{f(x)}=\frac{f(x)}{f(x-y)}$ ,

所以 $2=\frac{f(\frac{1}{2})}{f(0)}=\frac{f(1)}{f(\frac{1}{2})}=\frac{f(\frac{3}{2})}{f(1)}=\frac{f(\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}=\frac{f(3)}{f(\frac{5}{2})}$ ,

所以 $\sum_{k=1}^6 f(\frac{k}{2})=2+4+8+16+32+64=126$ ,

故选 D

方法二: 抽象出特殊函数 $f(x)=4^x$ , 快速求得答案

$\sum_{k=1}^6 f(\frac{k}{2})=2+4+8+16+32+64=126$ ,

故选 D.

8. (A)

解: 由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos 120^\circ = -2$ , 解得:  $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = 4$ , 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时,  $\mathbf{c} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$ , 由

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  得:  $\mathbf{a} \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}\right) = \mathbf{b} \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}\right)$ , 即 $\frac{1}{3}\mathbf{a}^2 + \frac{2}{3}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{b}^2$ , 由

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2$  得:  $\frac{1}{3}\mathbf{a}^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathbf{b}^2$ , 因为 $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = 4$ , 假设 $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$ , 则可求出 $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$ ,

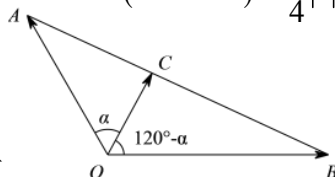
$|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$ , 代入 $\frac{1}{3}|\mathbf{a}|^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}|\mathbf{b}|^2$  中, 等号不成立, 故①错误;

设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ , 因为 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$  ( $0 < \lambda < 1$ ), 由向量共线定理可知, 点C在线段AB上, 如图, 设 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \alpha$ , 则 $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 120^\circ - \alpha$ , 因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ , 所以 $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \alpha = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cos (120^\circ - \alpha)$ , 即 $|\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = |\mathbf{b}| \cdot \cos (120^\circ - \alpha)$ , 故 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{c}$ 方向的投影等于 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{c}$ 方向的投影相等, 故点C满足 $OC \perp AB$ , 又 $x = |\mathbf{c}| \cos \alpha$ ,

$y = |\mathbf{c}| \cos (120^\circ - \alpha)$ , 所以

$x^2 + y^2 + xy = |\mathbf{c}|^2 \cos^2 \alpha + |\mathbf{c}|^2 \cos^2 (120^\circ - \alpha) + |\mathbf{c}|^2 \cos \alpha \cos (120^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}|\mathbf{c}|^2$ , 其

中 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ , 而



要想保证 $|c|$ 最大, 只需 $|AB|$ 最小, 由余弦定理可得:

$$|AB|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos 120^\circ = |a|^2 + |b|^2 + 4 \geq 2|a||b| + 4 = 12, \text{ 当且仅当 } |a| = |b|$$

时, 等号成立, 所以 $|AB|$ 最小值为 $2\sqrt{3}$ , 所以 $|c|$ 最大值为 $\frac{2S_{\triangle ABO}}{|AB|} = 1$ , 故 $x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4}|c|^2$

的最大值为 $\frac{3}{4}$ , ②正确. 故选: A.

## 二. 多项选择题:

9. (BC)

解: 事件 $A$ 为“只订甲报纸”, 事件 $B$ 为“至少订一种报纸”, 包含为订甲报纸, 订乙报纸, 订甲乙两种报纸, 事件 $C$ 为“至多订一种报纸”包含订甲报纸或订乙报纸, 事件 $D$ 为“不订甲报纸”, 事件 $E$ 为“一种报纸也不订”.

A.  $A$ 与 $C$ 不互斥不对立事件, 所以 $A$ 与 $C$ 是互斥事件, 不正确;

B.  $B$ 与 $E$ 是互斥事件, 且是对立事件, 正确;

C.  $B$ 与 $C$ 不互斥不对立事件, 所以 $B$ 与 $C$ 不是互斥事件正确;

D.  $C$ 与 $E$ 既不互斥也不对立事件. 所以 $C$ 与 $E$ 是互斥事件不正确;

10. (ABC)

解析: 对于选项 A, 因为 $p = 2$ , 所以 $x_1 + x_2 + 2 = |PQ|$ , 则 $PQ = 8$ , 故 A 正确;

对于选项 B, 设 $N$ 为 $PQ$ 的中点, 设点 $N$ 在 $l$ 上的射影为 $N_1$ , 点 $Q$ 在 $l$ 上的射影为 $Q_1$ ,

则由梯形中位线的性质可得 $NN_1 = \frac{PP_1 + QQ_1}{2} = \frac{PF + QF}{2} = \frac{PQ}{2}$ , 故 B 正确;

对于选项 C, 因为 $F(1, 0)$ , 所以 $|PM| + |PP_1| = |PM| + |PF| \geq |MF| = \sqrt{2}$ , 故 C 正确;

对于选项 D, 显然直线 $x = 0$ ,  $y = 1$ 与抛物线只有一个公共点, 设过 $M$ 的直线方程为

$$y = kx + 1 (k \neq 0), \text{ 联立 } \begin{cases} y = kx + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理, 得 } k^2x^2 + (2k - 4)x + 1 = 0, \text{ 令 } \Delta = 0, \text{ 则}$$

$k = 1$ , 所以直线 $y = x + 1$ 与抛物线也只有一个公共点, 此时有三条直线符合题意, 故 D 错误. 故选 ABC.

11. (BC)

解: 对于 A,  $MN = 2$ ,  $MD = 1$ , 所以 $DN = \sqrt{MN^2 - MD^2} = \sqrt{3}$ ,

则 $MN$ 的中点到 $MD$ 中点的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$MN$ 中点 $P$ 的轨迹为以 $MD$ 中点为圆心,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径且平行于平面 $ABCD$ 的圆,

其面积为 $\pi \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3\pi}{4}$ , 故 A 错误;

对于 B,  $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ,  $NB$ 即为 $N$ 到直线 $BB_1$ 的距离,

在平面 $ABCD$ 内, 点 $N$ 到定点 $B$ 的距离与到定直线 $DC$ 的距离相等,

所以点 $N$ 的轨迹就是以 $B$ 为焦点,  $DC$ 为准线的抛物线, 故 B 正确;

对于 C, 如图, 建立空间直角坐标系, 设 $N(x, y, 0)$ ,  $D_1(0, 0, 2)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,

$$\text{所以 } \overrightarrow{D_1N} = (x, y, -2), \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{D_1N} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{D_1N}| |\overrightarrow{AB}|} = \frac{|2y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} \times 2} = \frac{1}{2},$$

化简得  $3y^2 - x^2 = 4$ ，即  $\frac{y^2}{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{4} = 1$ ，所以  $N$  的轨迹为双曲线，故 C 正确；

对于 D， $MN$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\angle MND$ ，所以  $\angle MND = \frac{\pi}{3}$ ，

则  $DN = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以点  $N$  的轨迹为以  $D$  为圆心， $\frac{\sqrt{3}}{3}$  为半径的圆，故 D 错误。

故选：BC.

12. (ABD)

详解：对于 A，若  $X_0 > Y_0$  且  $a = b$ ，则  $\begin{cases} x(t) = X_0 \cosh(at) - Y_0 \sinh(at) \\ y(t) = Y_0 \cosh(at) - X_0 \sinh(at) \end{cases}$ ，

$$\text{即 } \begin{cases} x(t) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} X_0 - \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} Y_0 \\ y(t) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} Y_0 - \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} X_0 \end{cases}, \text{ 所以 } x(t) - y(t) = e^{at} (X_0 - Y_0),$$

由  $X_0 > Y_0$  可得  $x(t) - y(t) = e^{at} (X_0 - Y_0) > 0$ ，即 A 正确；

对于 B，当  $a = b$  时根据 A 中的结论可知  $x(t) > y(t)$ ，所以乙方实力先为 0，

$$\text{即 } y(t) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} Y_0 - \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} X_0 = 0, \text{ 化简可得 } e^{at} (X_0 - Y_0) = e^{-at} (X_0 + Y_0),$$

$$\text{即 } e^{2at} = \frac{X_0 + Y_0}{X_0 - Y_0}, \text{ 两边同时取对数可得 } 2at = \ln \left( \frac{X_0 + Y_0}{X_0 - Y_0} \right),$$

$$\text{即 } t = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{X_0 + Y_0}{X_0 - Y_0} \right) = \frac{1}{a} \ln \sqrt{\frac{X_0 + Y_0}{X_0 - Y_0}}, \text{ 所以比赛持续时长为 } T = \frac{1}{a} \ln \sqrt{\frac{X_0 + Y_0}{X_0 - Y_0}},$$

所以 B 正确；

对于 C，若甲方获得比赛胜利，则甲方可比赛时间大于乙方即可，

设甲方实力为 0 时所用时间为  $t_1$ ，乙方实力为 0 时所用时间为  $t_2$ ，

$$\text{即 } x(t_1) = X_0 \cosh(\sqrt{ab}t_1) - \sqrt{\frac{b}{a}} Y_0 \sinh(\sqrt{ab}t_1) = 0, \text{ 可得 } e^{2\sqrt{ab}t_1} = \frac{X_0 + Y_0 \sqrt{\frac{b}{a}}}{Y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} - X_0} > 0$$

$$\text{同理可得 } e^{2\sqrt{ab}t_2} = \frac{Y_0 + X_0 \sqrt{\frac{a}{b}}}{X_0 \sqrt{\frac{a}{b}} - Y_0} > 0$$

$$\text{即 } \frac{X_0 + Y_0 \sqrt{\frac{b}{a}}}{Y_0 \sqrt{\frac{b}{a}} - X_0} > \frac{Y_0 + X_0 \sqrt{\frac{a}{b}}}{X_0 \sqrt{\frac{a}{b}} - Y_0}, \text{ 解得 } \frac{X_0^2}{Y_0^2} > \frac{b}{a}$$

又因为  $X_0, Y_0, a, b$  都为正实数，所以可得  $\frac{X_0}{Y_0} > \sqrt{\frac{b}{a}}$ ，甲方获得比赛胜利；

所以可得 C 错误，D 正确。

故答案为：ABD.

### 三. 填空题：

13.  $\frac{3}{32}$       14.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

15.      ①      ;      ②

解：对于①，当  $n \geq 2$  时， $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n$ ，

$$\because a_1 = 0, \therefore a_n = n^2 - n$$

$\therefore a_i + i = i^2 (i = 1, 2, 3, \dots)$  为完全平方数

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  具有“P 性质”；

对于②，数列 1, 2, 3, 4, 5，具有“变换 P 性质”，数列  $\{b_n\}$  为 3, 2, 1, 5, 4，具有“P 性质”， $\therefore$  数列  $\{a_n\}$  具有“变换 P 性质”；

对于③， $\because 6, 1$  都只有与 3 的和才能构成完全平方数， $\therefore 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，不具有“变换 P 性质”。故答案为：①；②。

16.  $y = \pm x; \lambda = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$

解：(1) 根据  $(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF_2}) \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$ ，可知  $|OP| = |OF_2| = |OF_1|$ ，即  $\triangle PF_1F_2$  为直角三角

形。设  $|PF_1| = m, |PF_2| = n$ ，依题意有  $\begin{cases} mn = 2a^2 \\ m - n = 2a \end{cases}$ ，解得  $m = (\sqrt{3} + 1)a, n = (\sqrt{3} - 1)a$ ，

根据勾股定理得  $m^2 + n^2 = 4c^2$ ，解得  $c = \sqrt{2}a = \sqrt{2}b, a = b$ ，故双曲线为等轴双曲线，渐近线为  $y = \pm x$ 。

(2) 当  $a = \sqrt{2}$  时，双曲线  $C: x^2 - y^2 = 2$ ，设直线  $l: y = kx + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，联立方程组  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ ，化简得  $(1 - k^2)x^2 - 2kx - 3 = 0$ ，

$$1 - k^2 \neq 0, \Delta = 4k^2 + 12(1 - k^2) \geq 0, x_1 + x_2 = \frac{2k}{1 - k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{1 - k^2}$$

$$\begin{aligned} k_{AM} + k_{AN} &= \frac{y_1 - n}{x_1 - m} + \frac{y_2 - n}{x_2 - m} = \frac{(kx_1 + 1 - n)(x_2 - m) + (kx_2 + 1 - n)(x_1 - m)}{(x_1 - m)(x_2 - m)} \\ &= \frac{2kx_1x_2 + (-mk + 1 - n)(x_1 + x_2) - 2m + 2mn}{x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-6k}{1-k^2} + \frac{2k(-mk+1-n)}{1-k^2} + \frac{(-2m+2mn)(1-k^2)}{1-k^2} \\
&= \frac{-3}{1-k^2} - \frac{2mk}{1-k^2} + \frac{m^2(1-k^2)}{1-k^2} \\
&= \frac{-2mnk^2 + (-4-2n)k + (-2m+2mn)}{-m^2k^2 - 2mk + m^2 - 3}
\end{aligned}$$

因为  $k_{AM} + k_{AN}$  为定值  $\lambda$ ，所以

法一：  $-mnk^2 + (-4-2n)k + (-2m+2mn) = \lambda(-m^2k^2 - 2mk + m^2 - 3)$

$$(-mn + \lambda m^2)k^2 + (-4-2n+2m\lambda)k - 2m + 2mn - \lambda m^2 + 3\lambda = 0$$

$$\begin{cases} -mn + \lambda m^2 = 0 \\ -4-2n+2m\lambda = 0 \\ -2m + 2mn - \lambda m^2 + 3\lambda = 0 \end{cases}, \text{解得 } \lambda = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

法二：  $\frac{-2mn}{-m^2} = \frac{-4-2n}{-2m} = \frac{-2m+2mn}{m^2-3} = \lambda$ ，解得  $\lambda = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$

#### 四. 解答题：

17. (本小题满分 10 分)

解：

(I) 因为  $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，所以  $\omega = 2$ ，.....2 分

因为  $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，且  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，

所以  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，.....4 分

(II) 因为  $f(\frac{A}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以  $\sin(A + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，.....5 分

因为  $A \in (0, \pi)$ ，所以  $A = \frac{\pi}{3}$ ，.....6 分

由余弦定理得  $4 = b^2 + c^2 - bc$ ，.....7 分

因为  $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ，

所以  $bc \leq 4$  (当且仅当  $b = c$  时， $bc$  有最大值 4)，.....8 分

因为  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$ ，.....9 分

所以  $\triangle ABC$  面积的最大值为  $\sqrt{3}$ 。.....10 分

18. (本小题满分 12 分)

解：(1) 设事件  $C$  为“一天中甲员工午餐和晚餐都选择  $A$  餐厅就餐”，

事件  $D$  为“乙员工午餐和晚餐都选择  $B$  餐厅就餐”，

因为 100 个工作日中甲员工午餐和晚餐都选择  $A$  餐厅就餐的天数为 30，

乙员工午餐和晚餐都选择  $B$  餐厅就餐的天数为 40，

所以  $P(C) = \frac{30}{100} = 0.3$ ,  $P(D) = \frac{40}{100} = 0.4$ . .....3 分

(2) 由题意知, 甲员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率为 0.1,

乙员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率为 0.2,

记  $X$  为甲、乙两员工在一天中就餐餐厅的个数, 则  $X$  的所有可能取值为 1、2,

所以  $P(X=1) = 0.3 \times 0.2 + 0.1 \times 0.4 = 0.1$ ,  $P(X=2) = 1 - P(X=1) = 0.9$ , .....5 分

所以  $X$  的分布列为:

$X$	1	2
$P$	0.1	0.9

所以  $X$  的数学期望  $E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.9 = 1.9$ . .....7 分

(3) 由题知  $P(N|M) > P(N|\bar{M})$ ,

即  $\frac{P(NM)}{P(M)} > \frac{P(N\bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(N) - P(NM)}{1 - P(M)}$ , 即  $P(NM) > P(N) \cdot P(M)$ , .....9 分

即  $P(NM) - P(N)P(M) > P(N) \cdot P(M) - P(N)P(NM)$ ,

即  $P(NM) \cdot P(\bar{N}) > P(N) \cdot P(\bar{N}M)$ , 即  $\frac{P(NM)}{P(N)} > \frac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$ ,

即  $P(M|N) > P(M|\bar{N})$ . .....12 分

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,

选择①  $a_3 = 5$ ,  $S_9 = 63$ , 可知  $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 = 63$ , 所以  $a_5 = 7$ .

又  $a_3 = 5$ , 所以数列  $\{a_n\}$  的公差  $d = \frac{1}{2}(a_5 - a_3) = 1$ ,

所以  $a_n = a_3 + (n-3) \times 1 = n+2$ ; .....4 分

选择②  $3a_2 = a_{10}$ ,  $S_2 = 7$ , 可知  $3a_2 = a_2 + 8d$ ,  $S_2 = a_1 + a_2 = 2a_2 - d = 7$ , 则  $\begin{cases} d=1, \\ a_2=4, \end{cases}$

所以  $a_n = a_2 + (n-2) \times 1 = n+2$ ; .....4 分

选择③  $a_1 = 3$ ,  $S_8 - S_6 = 19$ , 可知  $S_8 - S_6 = a_8 + a_7 = 2a_1 + 13d = 19$ , 则  $\begin{cases} d=1, \\ a_1=3, \end{cases}$

所以  $a_n = a_1 + (n-1) \times 1 = n+2$ . .....4 分

又因为  $b_2 = a_2 = 4$ , 所以数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = 2^n$ . .....6 分

(2) 由题意

$$\begin{aligned}
 T_{4n+3} &= b_1 + a_1 + a_2 + b_2 + b_3 + a_3 + a_4 + b_4 + \cdots + b_{2n-1} + a_{2n-1} + a_{2n} + b_{2n} + b_{2n+1} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \\
 &= (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n} + b_{2n+1}) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}) \\
 &= \frac{2(1-2^{2n+1})}{1-2} + \frac{(a_1 + a_{2n+2})(2n+2)}{2} = 4^{n+1} + 2n^2 + 9n + 5 \cdots \cdots 12 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

20. (本小题满分 12 分)

(I)  $\because \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TB}$ , 而  $\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CD}$ ,

$$\therefore \overrightarrow{TD} = \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TB} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c},$$

所以  $\overrightarrow{TD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ . .....3 分

(II) 不妨设  $AB$  是四面体最长的棱, 则在  $\triangle ABT$ ,  $\triangle ABC$  中,  $AT + TB > AB$ ,  
 $AC + CB > AB$ ,

$$\therefore AT + TB + AC + CB > 2AB, \text{ 即 } (AT + AC) + (TB + BC) > 2AB,$$

故  $AT + AC$ ,  $TB + BC$  至少有一个大于  $AB$ , 不妨设  $AT + AC > AB$ ,

$\therefore AT$ ,  $AC$ ,  $AB$  构成三角形. ....6 分

(III) 设  $\overrightarrow{TA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{TB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{TC} = \vec{c}$ , 由 (1) 知  $\overrightarrow{TD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

$$\text{又 } \frac{AP}{AD} = \frac{TQ}{TA} = \frac{CR}{CT} = x, \text{ 有 } \overrightarrow{TQ} = x\vec{a}, \overrightarrow{TR} = (1-x)\vec{c}, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AD} = x(\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TB}) = x(\vec{c} - \vec{b}),$$

$$\therefore \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AT} = x(\vec{c} - \vec{b}) + \vec{a} = \vec{a} + x\vec{c} - x\vec{b},$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{TP} - \overrightarrow{TQ} = \vec{a} + x\vec{c} - x\vec{b} - x\vec{a} = (1-x)\vec{a} + x\vec{c} - x\vec{b},$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{TR} - \overrightarrow{TQ} = (1-x)\vec{c} - x\vec{a} = -x\vec{a} + (1-x)\vec{c},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{TM} = \lambda \overrightarrow{TB} = \lambda \vec{b}, \text{ 又 } \overrightarrow{TN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{TC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{TD} = \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} + \vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{TM} - \overrightarrow{TN} = \lambda \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{c} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \vec{b} - \vec{c} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为  $\overrightarrow{NM} \parallel$  平面  $PQR$ , 所以存在实数  $y, z$  使得:  $\overrightarrow{NM} = y\overrightarrow{QP} + z\overrightarrow{QR}$ ,

$\therefore$

$$-\frac{1}{2} \vec{a} + \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \vec{b} - \vec{c} = y(1-x)\vec{a} - yx\vec{b} + yx\vec{c} - zx\vec{a} + z(1-x)\vec{c}$$

$$= (y - xy - zx)\vec{a} - yx\vec{b} + (yx + z - xz)\vec{c}$$

$$\therefore \begin{cases} y - xy - zx = -\frac{1}{2} \\ -yx = \lambda + \frac{1}{2} \\ yx + z - xz = -1 \end{cases}, \text{ 消元: } (4\lambda + 1)x^2 - (4\lambda + 3)x + 2\lambda + 1 = 0 \text{ 在 } x \in \mathbf{R} \text{ 有解.}$$

$$\text{当 } \lambda = -\frac{1}{4} \text{ 时, } -2x + \frac{1}{2} = 0, \text{ 即 } x = \frac{1}{4};$$

$$\text{当 } \lambda \neq -\frac{1}{4} \text{ 时, } \Delta = (4\lambda + 3)^2 - 4(4\lambda + 1)(2\lambda + 1) \geq 0, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{5}}{4} \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{综上, 有 } -\frac{\sqrt{5}}{4} \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

所以对满足条件的平面  $\alpha$ , 点  $M$  都落在某一条长为  $\frac{\sqrt{5}}{2}TB$  的线段上. ...12 分

21. (本小题满分 12 分)



解：(I) 因为线段  $F_1M$  的垂直平分线交半径  $F_2M$  与点  $P$ ,

所以  $|PM| = |PF_1|$ ,

所以  $|PF_1| + |PF_2| = |MF_2| = 4$ , .....2 分

所以  $a=2, c=1, b=\sqrt{3}$ ,

所以  $P$  的轨迹  $Q$  的方程  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . .....4 分

(II)

解法一

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ . 由已知得: 直线  $l_1$  的方程为  $x = ky - 1$ ; 设  $B(x_3, y_3)$ ,

$D(x_4, y_4)$ . 由已知得: 直线  $l_2$  的方程为  $x = my + 1, \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{m} = -\frac{3}{4}, m = -\frac{4}{3k}$

$$\text{由 } \begin{cases} x = ky - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得 } 3(ky - 1)^2 + 4y^2 - 12 = 0, \text{ 即 } (3k^2 + 4)y^2 - 6ky - 9 = 0,$$

$$\text{所以 } \Delta = 36k^2 + 36(3k^2 + 4) = 144(k^2 + 1),$$

$$y_1 + y_2 = \frac{6k}{3k^2 + 4}, \quad x_1 x_2 = \frac{-9}{3k^2 + 4}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{故 } |AC| = \sqrt{1+k^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{12(k^2 + 1)}{3k^2 + 4} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{同理可得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

$$\text{所以 } \Delta_1 = 144(m^2 + 1),$$

$$\text{故 } |y_3 - y_4| = \sqrt{(y_3 + y_4)^2 - 4y_3 y_4} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}$$

设  $d_1, d_2$  分别为点  $B, D$  到直线  $l_1$  的距离,

$$\text{则 } S_{ABCD} = S_{\triangle CAB} + S_{\triangle CAD} = \frac{1}{2} |AC| (d_1 + d_2).$$

又  $B, D$  到直线  $AC$  在异侧, 则

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= \frac{|-x_3 + ky_3 + 1|}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{|-x_4 + ky_4 + 1|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|(k-m)(y_3 - y_4)|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\left|k + \frac{4}{3k}\right|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4} \\ &= \frac{\sqrt{9k^2+16}}{\sqrt{1+k^2}} \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S_{ABCD} = \frac{1}{2} |AC| \cdot (d_1 + d_2) = \frac{6(k^2 + 1)}{3k^2 + 4} \cdot \frac{\sqrt{9k^2 + 16}}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{6\sqrt{(9k^2 + 16)(k^2 + 1)}}{3k^2 + 4}, \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } 3k^2 + 4 = t, t > 4, \quad S_{ABCD} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{-4\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t} + 3} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{-4\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{49}{16}}$$

所以  $S_{ABCD} \in (6, \frac{7\sqrt{3}}{2}]$  .....12 分

解法二

设  $\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}y \end{cases}$ , 所以  $x_0^2 + y_0^2 = 4$ , 设圆心为  $O'$ ,

因为直线  $l_1, l_2$  的斜率之积为  $-\frac{3}{4}$ ,

所以  $k_1' \cdot k_2' = \frac{2}{\sqrt{3}}k_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}k_2 = -1$ , .....6 分

设直线  $A'C'$  方程  $y = k(x+1)$ ,

点  $O'$  到  $A'C'$  的距离为  $d = \frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$ , .....7 分

所以  $|A'C'| = 2\sqrt{4 - \frac{k^2}{k^2+1}} = 2\sqrt{3 + \frac{1}{k^2+1}}$ , .....8 分

同理  $|B'D'| = 2\sqrt{4 - \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+1}} = 2\sqrt{4 - \frac{1}{k^2+1}}$ , .....9 分

设四边形  $A'B'C'D'$  面积为  $S'$ ,

则  $S' = \frac{1}{2}|A'C'| \cdot |B'D'| = 2\sqrt{(4 - \frac{1}{k^2+1})(3 + \frac{1}{k^2+1})}$ , .....10 分

令  $t = \frac{1}{k^2+1}$ , 则  $t \in (0, 1)$ ,

所以  $S' = 2\sqrt{(4-t)(3+t)} = 2\sqrt{-t^2+t+12} = 2\sqrt{-(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{49}{4}}$ ,

所以  $S' \in (4\sqrt{3}, 7]$ ,

设四边形  $ABCD$  面积为  $S$ , 因为  $S' = \frac{2}{\sqrt{3}}S$ ,

所以  $S \in (6, \frac{7\sqrt{3}}{2}]$ . .....12 分

22. (本小题满分 12 分)

证明: (I) 显然:  $(1-x)^{\frac{1}{1-x}} > 0$  且  $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} > 0$  且  $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{原不等式} &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(1-x) < \frac{1}{x} \ln(1+x) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ 时}, (x-1) \ln(1-x) < \ln(1+x) \\ x < 0 \text{ 时}, (x-1) \ln(1-x) > \ln(1+x) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{令 } f(x) = (x-1) \ln(1-x) - \ln(1+x) \quad (-1 < x < 1 \text{ 且 } x \neq 0)$$

$$\text{则 } f'(x) = \ln(1-x) + 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)^2}$$

当  $x \in (-1, 0)$  时,  $f''(x) > 0$   $f'(x)$  在  $(-1, 0)$  递增,  $f'(x) < 0$

$x \in (0, 1)$  时,  $f''(x) < 0$ ,  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  递减,  $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$  在  $(-1, 0)$  递减, 在  $(0, 1)$  递减, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

$\therefore f(x)$  在  $(-1, 0)$  时,  $f(x) > 0$ , 在  $(0, 1)$  时,  $f(x) < 0$

(II) 因为

$$0.9999^{100} = \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{100}$$

$$0.9999^{101} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{101} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{101}$$

原不等式等价为:

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{101} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{101} < 1 - \frac{1}{100} < \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{100}$$

$$\text{即证: } \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{101} < 1 < \left(\frac{99}{100}\right)^{99} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{100}$$

\dots\dots\dots 8 \text{ 分}

$$\text{在(1)中, 令 } x = \frac{1}{100} \quad \left(\frac{99}{100}\right)^{-99} < \left(\frac{101}{100}\right)^{100} \therefore \left(\frac{99}{100}\right)^{99} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{100} > 1$$

$$\text{在(1)中, 令 } x = -\frac{1}{100} \quad \left(\frac{101}{100}\right)^{101} < \left(\frac{99}{100}\right)^{-100} \therefore \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \times \left(\frac{101}{100}\right)^{101} < 1$$

$$\therefore 0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

\dots\dots\dots 12 \text{ 分}