

1-5:CCBBC 6-8:CDD 9.CD 10.ACD 11.BCD 12.BCD

8. 原式 =  $\frac{2x^2 - x(x+y) + (x+y)^2}{xy} = \frac{2x^2 + xy + y^2}{xy} = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1$ , 易知等号可以取到, 故选  $D$ .

12. 令  $g(x) = e^{2x} f(x)$ , 则  $g'(x) = e^{2x} [f'(x) + 2f(x)] > 0$ , 故  $g(x)$  在  $R$  上单增. 对于  $A$ , 如  $f(x) = 1$  为常函数, 此时  $f(x)$  为偶函数,  $A$  错误; 对于  $B$ , 若  $x > 0$ , 则  $g(x) = e^{2x} f(x) > g(0) = 1$ , 从而  $f(x) > e^{-2x} > 0$ ,  $B$  正确; 对于  $C$ , 由  $g(\frac{1}{2}) = e f(\frac{1}{2}) > g(0) = e^0 f(0) = 1$  可得  $f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{e}$ ,  $C$  正确; 对于  $D$ , 若  $x > 0$ , 同  $B$  选项可知  $f(x) > e^{-2x}$ , 熟知  $e^x \geq x + 1$  (当且仅当  $x = 0$  时等号成立), 故  $e^{-2x} > -2x + 1 (x > 0)$ , 则  $f(x) > 1 - 2x$ ,  $D$  正确. 故选  $BCD$ .

13. 10 14. 35 15. 10 16. 4

16. 设  $l$  与  $f(x)$  交于  $A(x_1, e^{x_1})$ , 与  $g(x)$  交于  $B(x_2, \ln x_2)$ , 由题有  $k = f'(x_1) = e^{x_1} = g'(x_2) = \frac{1}{x_2}$ , 故

$x_1 = \ln k, x_2 = \frac{1}{k}$ , 又  $k = k_{AB} = \frac{e^{x_1} - \ln x_2}{x_1 - x_2} = \frac{k - \ln \frac{1}{k}}{\ln k - \frac{1}{k}}$ , 整理可得:  $(k-1)\ln k - k - 1 = 0$ , 令  $h(k) =$

$(k-1)\ln k - k - 1 (k > 1)$ , 则  $h'(k) = \ln k - \frac{1}{k}$ , 显然  $h'(k)$  单调递增, 又

$h'(1) = -1 < 0, h'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln \frac{2}{\sqrt{e}} > \ln 1 = 0$ , 故存在  $k_0 \in (1, 2)$  使得  $f'(k_0) = 0$ , 故  $f(k)$  在  $(1, k_0)$

单减,  $(k_0, +\infty)$  单增, 又  $f(1) = -2 < 0$ , 故  $f(k)$  在  $(1, k_0)$  无零点. 又因为  $f(4) = 3\ln 4 - 5 = 6\ln 2 - 5 < 0$ ,

$f(5) = 4\ln 5 - 6 = 2\ln \frac{25}{e^3} > 0$ , 由零点存在定理知  $f(k)$  在  $(4, 5)$  内有零点, 又  $f(k)$  在  $(k_0, +\infty)$  单增, 故

$f(k)$  在  $(4, 5)$  内有唯一零点, 故所求  $[k] = 4$ .

17. 解: (1) 若  $a = -1$ , 则  $A = \{x | x^2 + 2x < 0\} = (-2, 0)$ ,  $B = \left\{x \left| \frac{2x}{x-1} - 1 \leq 0 \right.\right\} = \left\{x \left| \frac{x+1}{x-1} \leq 0 \right.\right\} = [-1, 1)$ ,

故  $A \cup B = (-2, 1)$

(2)  $\because A \cap B = A, \therefore A \subseteq B$  即  $\{x | (x-2a)(x-a-1) < 0\} \subseteq [-1, 1)$

① 当  $A = \emptyset$  时,  $2a = a+1$  即  $a = 1$ , 此时  $A \subseteq B$  成立, 符合题意

② 当  $A \neq \emptyset$  时, 需满足: 
$$\begin{cases} 2a \neq a+1 \\ -1 \leq 2a \leq 1, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} \leq a \leq 0 \\ -1 \leq a+1 \leq 1 \end{cases}$$

综上,  $a \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \{1\}$

18. 解: (1) 列联表补充填写如右图:

	运动达标	运动不达标	合计
男	25	15	40
女	20	40	60
合计	45	55	100

$\chi^2 = \frac{100(25 \times 40 - 20 \times 15)^2}{40 \times 60 \times 45 \times 55} = \frac{2450}{297} \approx 8.249 > 7.879$

故根据小概率值  $\alpha = 0.005$  的独立性检验, 能认为运动达标与性别有关联.

(2) 由题意: 每名男生运动达标的概率为  $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ , 每名女生运动达标的概率为  $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ .

随机变量  $X$  的所有可能取值是 0, 1, 2, 3

$P(X=0) = \frac{3}{8} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}, P(X=1) = \frac{5}{8} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{3}{8} \times C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$

$P(X=2) = \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{8} \times C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{23}{72}, P(X=3) = \frac{5}{8} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{72}$

故  $X$  的分布列为:

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{23}{72}$	$\frac{5}{72}$

$\therefore X$  的期望  $E(x) = 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{23}{72} + 3 \times \frac{5}{72} = \frac{93}{72} = \frac{31}{24}$

19. 解: (1) 由题:  $f(x)$  定义域为  $(0,1) \cup (1,+\infty)$

$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ , 令  $f'(x) = 0$  得  $x = e$ , 列表如右图:

故  $f(x)$  的单增区间为  $(e, +\infty)$ , 单减区间为  $(0,1)$  和  $(1,e)$ .

$x$	$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	单减	单减	单增

(2) 由题意:  $k = f'(b) = \frac{\ln b - 1}{\ln^2 b}$ , 故直线  $l$  方程为:  $y - \frac{b}{\ln b} = \frac{\ln b - 1}{\ln^2 b}(x - b)$

将点  $(c, 0)$  代入  $l$  方程, 得:  $-\frac{b}{\ln b} = \frac{\ln b - 1}{\ln^2 b}(c - b)$ , 化简得:  $c = \frac{-b}{\ln b - 1} (b > e)$

令  $g(x) = \frac{-x}{\ln x - 1} (x > e)$ , 即求  $g(x)$  的最大值.  $g'(x) = \frac{-\ln x + 2}{(\ln x - 1)^2}$ , 令  $g'(x) = 0$  得  $x = e^2$

当  $x \in (e, e^2)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增; 当  $x \in (e^2, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减. 故  $g(x)$  在

$x = e^2$  处取得最大值,  $g(x)_{\max} = g(e^2) = -e^2$ . 故  $c$  的最大值为  $-e^2$ .

20. 解: (1) 由题:  $X \sim N(37.6, 0.16)$

$\therefore \mu = 37.6, \sigma = 0.4$ , 故  $P(37.2 \leq X \leq 38.4) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

$$= \frac{P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) + P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)}{2} \approx \frac{0.6827 + 0.9545}{2} = 0.8186$$

(2) 记  $A =$  “某人患有该流感”,  $B =$  “某人检测为阳性”

由题有:  $P(A) = \frac{1}{100}$ ,  $P(B|A) = \frac{4}{5}$ ,  $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{4}{5}$ , 则可得  $P(\bar{B}|A) = \frac{1}{5}$ ,  $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5}$

(i)  $P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}|A) + P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1}{100} \times \frac{1}{5} + \frac{99}{100} \times \frac{4}{5} = \frac{397}{500}$

(ii)  $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{5}}{\frac{397}{500}} = \frac{1}{397}$

21. (1) 解: 由题:  $f(x) = 2\ln x - x - \frac{3}{x}$ ,  $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 + \frac{3}{x^2} = \frac{-(x+1)(x-3)}{x^2} (x > 0)$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 3$ , 列表如右图:

$x$	$(0,3)$	$3$	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	单调递增	$2\ln 3 - 4$	单调递减

故当  $x = 3$  时,  $f(x)$  取得极大值,

极大值为  $2\ln 3 - 4$ ;  $f(x)$  无极小值.

(2) 证明: 若  $n < 0$ , 则  $e^n < 1 \leq m^2 (m \geq 1)$ , 结论成立;

若  $n \geq 0$ ,  $\therefore g'(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ , 令  $g'(x) = 0$ , 得  $x = 0$ , 当  $x > 0$  时,  $g'(x) > 0$ ,

故  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  单调递增.

要证  $m^2 \geq e^n$ , 只需证  $2\ln m \geq n$ , 又  $\therefore 2\ln m \geq 0, n \geq 0$ , 且  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  单调递增,

故只需证明  $g(2\ln m) \geq g(n)$ ,

又因为  $g(n) = h(m)$ , 故只需证明  $g(2\ln m) \geq h(m)$ ,

由  $g(x) = x + 2e^{-\frac{x}{2}}$ ,  $h(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$

故只需证明:  $2\ln m + \frac{2}{m} \geq \ln m + \frac{1}{m} + 1 \Leftrightarrow \ln m + \frac{1}{m} - 1 \geq 0 (m \geq 1)$

令  $\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 (x \geq 1)$ , 只需证  $\varphi(x) \geq 0$ ,

$\therefore \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \geq 0$ ,  $\therefore \varphi(x)$  在  $[1, +\infty)$  单调递增,  $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$ . 证毕.

22.解：（1）  $f'(x) = e^{x-1} + 2x - 3$ ，  $\because f'(x)$  在  $R$  上单调递增，又  $f'(1) = 0$ ，故当  $x < 1$  时，  $f'(x) < 0$ ，

当  $x > 1$  时，  $f'(x) > 0$ ，故  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  单调递减，  $(1, +\infty)$  单调递增

① 当  $t + 2 \leq 1$  即  $t \leq -1$  时，  $f(x)$  在  $[t, t + 2]$  单减，故  $f(x)_{\min} = f(t + 2) = e^{t+1} + t^2 + t - 2$

② 当  $t < 1 < t + 2$  即  $-1 < t < 1$  时，  $f(x)$  在  $[t, 1]$  单减，  $[1, t + 2]$  单增，故  $f(x)_{\min} = f(1) = -1$

③ 当  $t \geq 1$  时，  $f(x)$  在  $[t, t + 2]$  单增，故  $f(x)_{\min} = f(t) = e^{t-1} + t^2 - 3t$

综上，当  $t \leq -1$  时，  $f(x)_{\min} = e^{t+1} + t^2 + t - 2$ ；当  $-1 < t < 1$  时，  $f(x)_{\min} = -1$ ；

当  $t \geq 1$  时，  $f(x)_{\min} = e^{t-1} + t^2 - 3t$

（2）由题：  $g(x)_{\min} \geq f(x)_{\min}$

由（1）知  $f(x)$  在  $(0, 1)$  单减，  $(1, 2)$  单增，故  $f(x)_{\min} = f(1) = -1$

故问题转化为对  $\forall x \in (0, +\infty)$ ，都有  $g(x) \geq -1 \Leftrightarrow 6e^x - x^3 - 4x^2 - ax - 7 \geq -1$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{6e^x - x^3 - 4x^2 - 6}{x}, \text{ 令 } h(x) = \frac{6e^x - x^3 - 4x^2 - 6}{x} (x > 0), \text{ 则 } a \leq h(x)_{\min},$$

$$h'(x) = \frac{(6e^x - 3x^2 - 8x)x - (6e^x - x^3 - 4x^2 - 6)}{x^2} = \frac{6e^x(x-1) - 2x^3 - 4x^2 + 6}{x^2}$$

$$= \frac{6e^x(x-1) - 2(x-1)(x^2 + 3x + 3)}{x^2} = \frac{2(x-1)(3e^x - x^2 - 3x - 3)}{x^2} (x > 0),$$

$$\text{令 } \varphi(x) = 3e^x - x^2 - 3x - 3, \quad \varphi'(x) = 3e^x - 2x - 3, \quad \text{令 } u(x) = \varphi'(x) = 3e^x - 2x - 3,$$

则  $u'(x) = 3e^x - 2 > 3e^0 - 2 = 1 > 0$ ，故  $u(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增，  $u(x) > u(0) = 0$ ，

即  $\varphi'(x) > 0$ ，从而  $\varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增，故  $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ ，

则  $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ，  $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

从而  $h(x)$  在  $(0, 1)$  单调递减，在  $(1, +\infty)$  单调递增，  $\therefore h(x)_{\min} = h(1) = 6e - 11$ ，故  $a \leq 6e - 11$ .

