

# 西南大学附中 2022—2023 学年度下期期末考试

## 高二数学试题

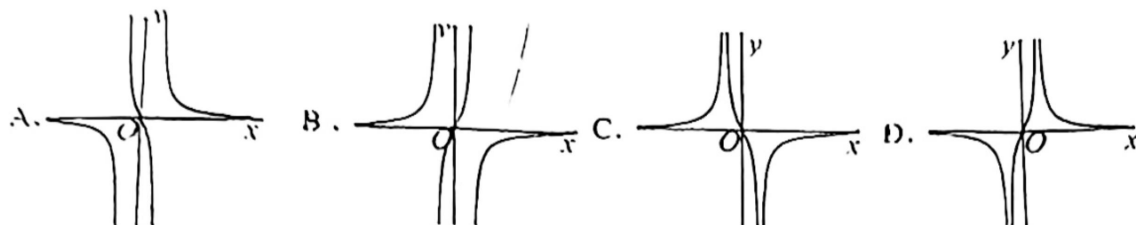
(满分: 150 分: 考试时间: 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写: 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生保存, 以备评讲)。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $M = \{x | x = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$ , 集合  $N = \{x | x = 6k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ , 则 ( )  
A.  $M = N$                       B.  $M \subseteq N$                       C.  $N \subseteq M$                       D.  $M \cap N = \emptyset$
2. 已知  $p: x > 0$ ,  $q: x + \frac{1}{x} \geq 2$ , 则  $p$  是  $q$  的 ( )  
A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                              D. 既不充分也不必要条件
3. 若不等式  $x^2 - ax + 4 > 0$  在  $x \in [1, 3]$  上有实数解, 则  $a$  的取值范围是 ( )  
A.  $(-\infty, 4)$                       B.  $(-\infty, 5)$                       C.  $\left(-\infty, \frac{13}{3}\right)$                       D.  $(4, 5)$
4. 从装有 3 个红球和 4 个白球的袋子中不放回地随机取出 3 个球, 若取出的球中有红球, 则取出的球全是红球的概率为 ( )  
A.  $\frac{1}{35}$                               B.  $\frac{1}{31}$                               C.  $\frac{1}{15}$                               D.  $\frac{1}{7}$
5. 甲乙等五名学生参加数学、物理、化学、生物这四门学科竞赛, 已知每人恰参加一门学科竞赛, 每门学科竞赛都有人参加, 且甲乙两人不参加同一学科竞赛, 则一共有 ( ) 种不同的参加方法  
A. 72                              B. 144                              C. 216                              D. 240
6. 函数  $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{|1-x^2|}$  的图象大致为 ( )



7. 已知函数  $f(x) = \ln[ax^2 + (a-6)x + 2]$  既没有最大值，也没有最小值，则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 2] \cup [18, +\infty)$  B.  $(2, 18)$  C.  $(0, 2] \cup [18, +\infty)$  D.  $[0, 2] \cup [18, +\infty)$

8. 已知  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + y = 1$ , 则  $\frac{2x^2 - x + 1}{xy}$  的最小值为 ( )

- A. 4 B.  $\frac{14}{3}$  C.  $\sqrt{2} + 2$  D.  $2\sqrt{2} + 1$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是 ( )

- A. 经验回归方程中  $\hat{b}$  的含义是  $x$  每增加一个单位， $y$  增加的单位数  
B. 样本相关系数  $r \in [-1, 1]$ ，当  $r = 0$  时，表明成对样本数据间没有任何相关关系  
C. 决定系数  $R^2$  可以作为衡量任何模型拟合效果的一个指标，它越大，拟合效果越好  
D. 经验回归方程  $\hat{y} = 3x + 1$  相对于点  $(2, 6.5)$  的残差为  $-0.5$

10. 已知  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ，则 ( )

- A.  $f(x)$  为奇函数 B.  $f(x)$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上单调递减  
C.  $f(x)$  值域为  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  D.  $f(f(x))$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$

11. 已知  $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$  的二项展开式中第 3 项和第 4 项的二项式系数最大，则 ( )

- A.  $n = 6$  B. 展开式的各项系数和为 243  
C. 展开式中奇数项的二项式系数和为 16 D. 展开式中有理项一共有 3 项

12. 已知函数  $f(x)$  满足  $f'(x) + 2f(x) > 0$ ，且  $f(0) = 1$ ，则 ( )

- A.  $f(x)$  不可能是偶函数 B. 若  $x > 0$ ，则  $f(x) > 0$   
C.  $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{e}$  D. 若  $x > 0$ ，则  $f(x) > 1 - 2x$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知随机变量  $X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ ，则  $D(3X-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 现有 9 名同学按照身高从高到低排成一排，体育老师决定让其中 3 人出列，要求相邻两人不能同时出列，则满足条件的出列方法有  $\underline{\hspace{2cm}}$  种（用数字作答）.

15. 已知函数  $f(2x+1)$  为偶函数，且  $f(x+2) = -f(x)$ ，当  $0 \leq x \leq 1$  时， $f(x) = 2^x - 1$ ，则函数  $g(x) = \lg|x|$  的图象与  $f(x)$  的图象一共有  $\underline{\hspace{2cm}}$  个公共点.

16. 已知  $f(x) = e^x$ ， $g(x) = \ln x$ ，直线  $l$  既和  $f(x)$  的图象相切，又和  $g(x)$  的图象相切，记直线  $l$  的斜率为  $k (k > 1)$ ，则  $[k] = \underline{\hspace{2cm}}$ （其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数）.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知集合  $A = \{x | x^2 - (3a+1)x + 2a(a+1) < 0\}$ ， $B = \left\{x \left| \frac{2x}{x-1} \leq 1 \right.\right\}$

(1) 若  $a = -1$ ，求  $A \cup B$ ；

(2) 若  $A \cap B = A$ ，求  $a$  的取值范围.

18. 体育强则中国强. 站在“两个一百年”奋斗目标交汇的历史节点上，作为教育部直属重点大学附中，西南大学附中始终高度重视学校体育工作，构建德智体美劳全面培养的教育体系. 现从该校随机抽取 100 名学生调查其运动习惯（称每周运动不少于 3 次的为运动达标，否则为运动不达标），得到如下数据：

	运动达标	运动不达标	合计
男	25		40
女		40	
合计			

(1) 补全  $2 \times 2$  列联表，根据小概率值  $\alpha = 0.005$  的独立性检验，能否认为运动达标与性别有关联？

(2) 用样本估计总体，将频率视为概率，现从该校所有男生中随机抽取 1 名男生进行调查，从该校所有女生中随机抽取 2 名女生进行调查，抽取的学生运动是否达标相互独立，设随机变量  $X$  表示这三人中运动达标的人数，求  $X$  的分布列与数学期望.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$\alpha$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
$\chi_\alpha$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19. 已知  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- (1) 求  $f(x)$  单调区间;
- (2) 点  $A(b, f(b)) (b > e)$  为  $f(x)$  图象上一点, 设函数  $f(x)$  在点  $A$  处的切线为直线  $l$ , 若直线  $l$  与  $x$  轴交于点  $(c, 0)$ , 求  $c$  的最大值.

20. 某医疗机构成立了一支研发小组负责某流感相关专题的研究

- (1) 该研发小组研制了一种退烧药, 经过大量临床试验发现流感患者使用该退烧药一天后的体温 (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 近似服从正态分布  $N(37.6, 0.16)$ , 流感患者甲服用了该退烧药, 设一天后他的体温为  $X$ , 求  $P(37.2 \leq X \leq 38.4)$ ;
- (2) 数据显示人群中每个人患有该流感的概率为 1%, 该医疗机构使用研发小组最新研制的试剂检测病人是否患有该流感, 由于各种因素影响, 该检测方法的准确率是 80%, 即一个患有该流感的病人有 80% 的可能检测结果为阳性, 一个不患该流感的病人有 80% 的可能检测结果为阴性.

(i) 若乙去该医疗机构检测是否患有该流感, 求乙检测结果为阴性的概率;

(ii) 若丙在该医疗机构检测结果为阴性, 求丙患有该流感的概率.

附:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ,  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ,  $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

21. 已知  $f(x) = a \ln x - x - \frac{3}{x}$

- (1) 若  $a = 2$ , 求  $f(x)$  的极值;
- (2) 若  $a = 1$ ,  $g(x) = x + 2e^{-\frac{x}{2}}$ ,  $h(x) = f(x) + x + \frac{4}{x} + 1$ , 且  $h(m) = g(n)$ , 其中  $m \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , 求证:  $m^2 \geq e^n$ .

22.  $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x$

- (1) 求  $f(x)$  在  $[t, t+2]$  上的最小值;
- (2)  $g(x) = 6e^x - x^3 - 4x^2 - ax - 7$ , 且  $\forall x_1 \in (0, +\infty)$ ,  $\exists x_2 \in (0, 2)$ ,  $g(x_1) \geq f(x_2)$ , 求  $a$  的取值范围.

(命题人: 廖海波、余业兵 审题人: 赖立新)