

# 西南大学附中 2022—2023 学年度下期期中考试

## 高一数学试题

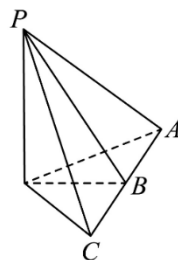
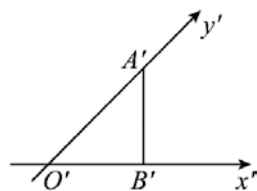
(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

### 注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生保存, 以备评讲)。

**一、单项选择题:** 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数  $z = -2 - i$ , 则  $z$  的实部是 ( )  
A.  $-2$                       B.  $2$                       C.  $-1$                       D.  $-i$
2. 已知角  $\theta$  的终边经过点  $P(-1, -\sqrt{3})$ , 则  $\cos\theta$  的值为 ( )  
A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{1}{2}$
3. 如图, 一个水平放置的三角形  $ABO$  的斜二测直观图是等腰直角三角形  $A'B'O'$ , 若  $B'A' = B'O' = 1$ , 那么原三角形  $ABO$  的周长是 ( )  
A.  $2\sqrt{2} + 1$                       B.  $4 + 2\sqrt{2}$   
C.  $2\sqrt{2} + 2$                       D.  $\sqrt{2} + 2$
4. 复数  $z$  满足  $z \cdot \bar{z} - i \cdot z = 16 - 2i$ ,  $i$  为虚数单位, 则复数  $z =$  ( )  
A.  $2 - 3i$                       B.  $2 - 4i$                       C.  $2 + 3i$  或  $2 - 4i$                       D.  $2 - 3i$  或  $2 + 4i$
5. 为测量新校门的高度, 在和新校门底部位于同一水平高度的共线三点  $A, B, C$  处分别测得校门顶端  $P$  处仰角分别为  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ , 且  $AB = BC = 8\text{ m}$ , 则新校门的高度为 ( )



- A.  $3\sqrt{6}\text{ m}$
- B.  $4\sqrt{6}\text{ m}$
- C.  $6\sqrt{6}\text{ m}$
- D.  $9\sqrt{6}\text{ m}$

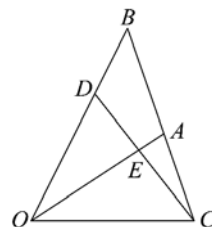
6. 如图, 已知在  $\triangle COB$  中,  $\overline{BA} = \overline{AC}$ ,  $\overline{OD} = 2\overline{DB}$ ,  $DC$  和  $OA$  交于点  $E$ , 若  $\overline{CE} = \lambda\overline{CD}$ , 则实数  $\lambda$  的值为 ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{2}{5}$

C.  $\frac{3}{5}$

D.  $\frac{2}{3}$



7. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 2$ ,  $BC = \sqrt{3}$ , 点  $E$  是  $AB$  中点, 点  $P$  在  $BC$  边上, 若  $\overline{DA} \cdot \overline{DP} = \sqrt{3}$ , 则  $\overline{DE} \cdot \overline{DP} =$  ( )

A.  $2 + \sqrt{3}$

B.  $3 + \sqrt{3}$

C.  $1 + \sqrt{3}$

D.  $3 - \sqrt{3}$

8. 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $BC = 2$ ,  $\sin B + \sin C = 3\sin A$ , 点  $D$  是  $BC$  边的中点, 则  $AD$  的长度的取值范围是 ( )

A.  $[8, 9)$

B.  $[2\sqrt{2}, 3)$

C.  $\left[8, \frac{73}{9}\right)$

D.  $\left[2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{73}}{3}\right)$

**二、多项选择题:** 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题正确的是 ( )

A. 棱柱的侧棱都相等, 侧面都是平行四边形

B. 两个面平行, 其余各面都是梯形的多面体是棱台

C. 用平面截圆柱得到的截面可能是圆、矩形、等腰梯形等

D. 底面是正方形, 两个侧面是矩形的四棱柱是正四棱柱

10. 已知复数  $z_1, z_2$ , 则下列结论中一定正确的是 ( )

A.  $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|$

B. 若  $z_1 z_2 = 0$ , 则  $z_1 = 0$  或  $z_2 = 0$

C.  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

D. 若  $|z_1| = |z_2|$ , 则  $z_1^2 = z_2^2$

11. 已知函数  $f(x) = \left| \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$ , 则下列说法正确的是 ( )

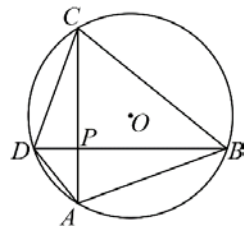
A.  $f(x)$  的值域为  $[0, 1]$

B. 若  $\omega = 1$ , 则  $f(x)$  的图像关于点  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  中心对称

C.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ , 则  $\omega = \pm 1$

D. 若  $\omega = 2$ ,  $f(x)$  的增区间为  $\left[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

12. 如图, 已知圆  $O$  的半径为 3, 点  $P$  是圆  $O$  内的定点, 且  $OP=2$ , 弦  $AC, BD$  均过点  $P$ , 则下列说法正确的是 ( )



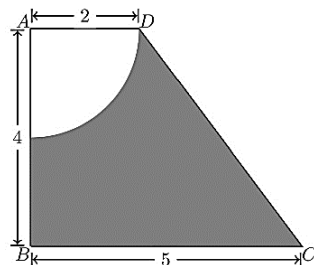
- A.  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = -8$   
 B.  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$  的取值范围是  $[-9, -1]$   
 C. 当  $AC \perp BD$  时,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  为定值  
 D.  $AC \perp BD$  时,  $|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|$  的最大值为 28

**三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.**

13. 已知向量  $\vec{a} = (\lambda, -2)$ ,  $\vec{b} = (1, 3)$ , 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $|\vec{a} + \vec{b}| =$  \_\_\_\_\_.
14. 正三棱台  $ABC-A'B'C'$  的上底面边长  $AB=2$ , 下底面边长  $A'B'=4$ , 棱台的高为 2, 则该正三棱台的侧面积为\_\_\_\_\_.
15. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $B=2C$ ,  $b=6$ ,  $c=5$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.
16. 已知点  $O$  是  $\triangle ABC$  所在平面内一点,  $4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}^2 - 1$ ,  $4\overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 1 - \overrightarrow{OB}^2$ , 则向量  $4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  与  $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$  所成夹角的最大值为\_\_\_\_\_.

**四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. (10 分) 如图, 已知在直角梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AD=2$ ,  $AB=4$ ,  $BC=5$ , 若将该图形中阴影部分绕  $AB$  所在直线旋转一周, 求形成的几何体的表面积与体积.



18. (12 分) 欧拉(1707-1783), 他是数学史上最多产的数学家之一, 他发现并证明了欧拉公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , 从而建立了三角函数和指数函数的关系, 若将其中的  $\theta$  取作  $\pi$  就得到了欧拉恒等式  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , 它是令人着迷的一个公式, 它将数学里最重要的几个量联系起来, 两个超越数——自然对数的底数  $e$ , 圆周率  $\pi$ , 两个单位——虚数单位  $i$  和自然数单位 1, 以及被称为人类伟大发现之一的 0, 数学家评价它是“上帝创造的公式”, 请你根据欧拉公式:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , 解决以下问题:

- (1) 将复数  $e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\pi i}$  表示成  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$  为虚数单位) 的形式;  
 (2) 求  $|e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\theta i}|$  ( $\theta \in \mathbf{R}$ ) 的最大值.

19. (12 分) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a^2 + b^2 + c^2 = 2\sqrt{3}ab\sin C$ .

(1) 证明:  $\triangle ABC$  为等边三角形;

(2) 若(1)中的等边  $\triangle ABC$  边长为 2, 试用斜二测法画出其直观图, 并求直观图面积.

注: 只需画出直观图并求面积, 不用写出详细的作图步骤.

20. (12 分) 在平面直角坐标系中, 已知向量  $\mathbf{m} = (1, 1)$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ , 向量  $\mathbf{m}$  与  $\mathbf{n}$  间的夹角为  $45^\circ$ .

(1) 求  $|2\mathbf{m} + \mathbf{n}|$  的值;

(2) 若向量  $2\mathbf{m} + \lambda\mathbf{n}$  与  $\lambda\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  夹角为钝角, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

21. (12 分) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ , 若  $b\cos\frac{A}{2} = a\sin B$ .

(1) 求角  $A$ ;

(2) 设  $a = 6$ ,  $O$  为  $\triangle ABC$  内一点, 线段  $AO$  的延长线交  $BC$  于点  $D$ , \_\_\_\_\_, 求  $\triangle ABC$  的面积.

在下面三个条件中选择一个补充在横线上, 使  $\triangle ABC$  存在, 并解决问题.

①  $O$  为  $\triangle ABC$  的重心,  $OA = 2\sqrt{3}$ ; ②  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心,  $OA = 4$ ; ③  $O$  为  $\triangle ABC$  的内心,  $AD = 3\sqrt{3}$ .

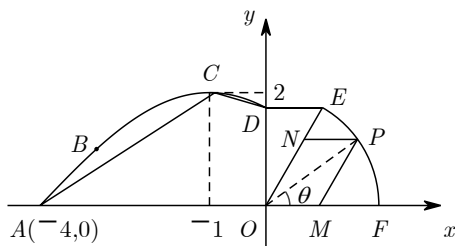
注: ①如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

②若选择的序号条件无法构成三角形, 需说明理由, 且不用重新选择其它序号作答.

22. (12 分) 如图, 在我校即将投入使用的新校门旁修建了一条专门用于跑步的红色跑道, 这条跑道一共由三个部分组成, 其中第一部分为曲线段  $ABCD$ , 该曲线段可近似看作函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ),  $x \in [-4, 0]$  的图象, 图象的最高点坐标为  $C(-1, 2)$ . 第二部分是长为 1 千米的直线段  $DE$ ,  $DE \parallel x$  轴. 跑道的最后一部分是以  $O$  为圆心的一段圆弧  $\widehat{EF}$ .

(1) 若新校门位于图中的  $B$  点, 其离  $AF$  的距离为 1 千米, 一学生准备从新校门笔直前往位于  $O$  点的万象楼, 求该学生走过的路  $BO$  的长;

(2) 若点  $P$  在弧  $\widehat{EF}$  上, 点  $M$  和点  $N$  分别在线段  $OF$  和线段  $OE$  上, 若平行四边形  $OMPN$  区域为学生的休息区域, 记  $\angle POF = \theta$ , 请写出学生的休息区域  $OMPN$  的面积  $S$  关于  $\theta$  的函数关系式, 并求当  $\theta$  为何值时,  $S$  取得最大值.



(命题人、审题人: 校命题小组)