西南大学附中 2022—2023 学年度下期期中考试

数学试题参考答案及评分细则

一、单项选择题：每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	B	C	A	D

二、多项选择题：每小题 5 分，共 20 分．

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	ACD	BCD

三、填空题：每小题 5 分，共 20 分．

题号	13	14	15	16
答案	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{39}$	$\frac{132}{25}$	$\frac{\pi}{6}$

四、解答题：共 70 分．

17．解：由题意知，所求旋转体的表面积由圆台下底面、侧面和一半球面组成．

在直角梯形 $ABCD$ 中，过 D 点作 $DE\perp BC$，垂足为 E,

在 Rt$\triangle DEC$ 中，$CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=5$，

所以 $S_{半球}=8\pi$，$S_{圆台侧}=35\pi$，$S_{圆台下底}=25\pi$ $\quad\therefore S_{表}=8\pi+35\pi+25\pi=68\pi$．

因为圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\left(\pi\times2^2+\sqrt{(\pi\times2^2)(\pi\times5^2)}+\pi\times5^2\right)\times4=52\pi$，

半球的体积 $V_1=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times2^3=\frac{16}{3}\pi$，所以所求几何体的体积为 $V-V_1=\frac{140}{3}\pi$．

18．解：(1) 因为 $e^{\frac{\pi}{3}i}+e^{\pi i}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

所以 $e^{\frac{\pi}{3}i}+e^{\pi i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$．

(2) $e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{\theta i}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)+(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\theta+(1+\sin\theta)i$

所以 $\left|e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{\theta i}\right|=\sqrt{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1}=\sqrt{2+2\sin\theta}$

因为 $\theta\in\mathbf{R}$，所以 $\sin\theta\in[-1,1]$，因此 $2+2\sin\theta\leqslant 2+2=4$，

所以 $\left|e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{\theta i}\right|(\theta\in\mathbf{R})$ 的最大值为 2.

19．解：(1) 由题及余弦定理知，$a^2+b^2=2\sqrt{3}ab\sin C-c^2=2\sqrt{3}ab\sin C-(a^2+b^2-2ab\cos C)$

即 $a^2+b^2=ab(\sqrt{3}\sin C+\cos C)=2ab\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2ab$

又因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，所以 $a^2+b^2=2ab$，即 $a=b$，$C=\frac{\pi}{3}$．

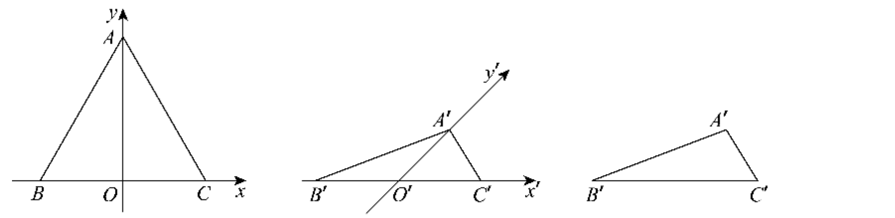
因此，$\triangle ABC$ 为等边三角形．

(2) 画法：①如图(1)，在等边 $\triangle ABC$ 中，取 BC 所在直线为 x 轴，BC 的垂直平分线为 y 轴，两轴相交于点 O；

在图(2)中，画相应的 x' 轴与 y' 轴，两轴相交于点 O'，使 $\angle x'O'y'=45°$；

②在图(2)中，以 O' 为中点，在 x' 轴上取 $B'C'=BC$，在 y' 轴上取 $O'A'=\frac{1}{2}OA$；

③连接 $A'B'$，$A'C'$，擦去辅助线 x' 轴和 y' 轴，得等边 $\triangle ABC$ 的直观图 $A'B'C'$(图(3))．



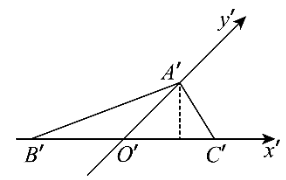
图(1) 图(2) 图(3)

因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，所以 $AB=BC=2$，BC 边上的高为 $h=\sqrt{3}$，

在 $\triangle A'O'C'$ 中，$\angle A'O'C'=45°$，所以 $B'C'=BC=2$，$A'O'=\frac{1}{2}AO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$B'C'$ 边上的高 $h'=A'O'\sin\angle A'O'C'=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

故 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}B'C'\cdot h'=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，



故直观图 $\triangle A'B'C'$ 面积 $\frac{\sqrt{6}}{4}$．

20．解：(1) 由题设知 $|m|=\sqrt{2}$，

所以 $|2m+n|^2=4m^2+4m\cdot n+n^2=4\times2+4\times\sqrt{2}\times1\times\cos45°+1=13$

即 $|2m+n|=\sqrt{13}$．

(2) 因为向量 $2m+\lambda n$ 与 $\lambda m+3n$ 夹角为钝角，

所以 $(2m+\lambda n)\cdot(\lambda m+3n)<0$，且 $2m+\lambda n$ 与 $\lambda m+3n$ 不能共线

即 $2\lambda m^2+3\lambda n^2+(\lambda^2+6)m\cdot n<0$，所以 $\lambda^2+7\lambda+6<0$，解得 $-6<\lambda<-1$．

若 $2m+\lambda n$ 与 $\lambda m+3n$ 反向共线，则 $\lambda=-\sqrt{6}$．

综上，实数 λ 的取值范围是 $(-6,-\sqrt{6})\cup(-\sqrt{6},-1)$.

21．解：(1) 因为 $b\cos\frac{A}{2}=a\sin B$

所以 $\sin B\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin B$ ，即 $\sin B\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin B$

因为 $A,B\in(0,\pi)$ ，所以 $\sin B>0,\cos\frac{A}{2}\neq 0$ ，

所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ ，又 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$ ，所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$ ，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 若选条件①

因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，且 $AO=2\sqrt{3}$ ，所以 $AD=3\sqrt{3}$ ，

又 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ ，所以 $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{4}(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\bullet\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC)$ ，

即 $27=\frac{1}{4}(c^2+b^2+bc)$ ……(*)

由余弦定理得 $a^2=c^2+b^2-2bc\cos\angle BAC$ ，即 $36=b^2+c^2-bc$ ……(**)

联立(*)(**)可得 $b=c=6$ ，此时 $\triangle ABC$ 存在，为正三角形．

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times 36\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

若选条件②

设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin\angle BAC}=2R$ ，所以 $R=\frac{6}{2\times 2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 AO 为外接圆半径，所以 $AO=2\sqrt{3}\neq 4$ ，

条件②与此矛盾，此时 $\triangle ABC$ 不存在，故不选②．

若选条件③

因为 O 为 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{\pi}{6}$ ，

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$ ，得 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}c\bullet AD\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}b\bullet AD\sin\frac{\pi}{6}$

因为 $AD=3\sqrt{3}$ ，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}bc=3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}(b+c)$ ，即 $b+c=\frac{bc}{3}$ ，

由余弦定理可得 $b^2+c^2-bc=a^2=36$ ，即 $(b+c)^2-3bc=36$ ，

所以 $\frac{(bc)^2}{9}-3bc-36=0$ ，即 $(bc+9)\left(\frac{bc}{9}-4\right)=0$ ，

因为 $bc=36$ ，所以 $b=c=6$ ，此时 $\triangle ABC$ 存在，为正三角形．

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times 36\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

22．解：(1) 由条件知， $A=2$ ，又因为 $\frac{T}{4}=3$ ， $T=\frac{2\pi}{\omega}=12$ ，所以 $\omega=\frac{\pi}{6}$.

又因为当 $x=-1$ 时，有 $y=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$ ，且 $\varphi\in(0,\pi)$ ，所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

所以曲线段 $ABCD$ 的解析式为 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right),x\in[-4,0]$.

由 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)=1$ ，即 $\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ ，解得 $x=-3+12k(k\in\mathbf{Z})$ ，

又因为 $x\in[-4,0]$ ，所以 $k=0$ ， $x=-3$ ，所以 $B(-3,1)$.

所以 $OB=\sqrt{10}$ ，即该学生走过的路 BO 的长为 $\sqrt{10}$ 千米．

(2) 由题可知，令 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)=0$ ，解得 $y=\sqrt{3}$ ，

所以 $E(1,\sqrt{3})$ ， $|OE|=2$ ， $\angle EOF=\frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle PNO$ 中， $OP=2,\angle PNO=\frac{2\pi}{3},\angle NPO=\theta,\angle NOP=\frac{\pi}{3}-\theta$ ，

则由正弦定理 $\frac{OP}{\sin\angle PNO}=\frac{ON}{\sin\angle NPO}=\frac{PN}{\sin\angle NOP}$ ，可得 $\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{ON}{\sin\theta}=\frac{PN}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$ ，

故可得 $ON=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta,PN=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ ，

故 $S_{\triangle PNO}=\frac{1}{2}\sin\angle PNO\times NP\times NO=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$

即 $S=2S_{\triangle PNO}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时， $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$ ，此时 S 取得最大值．