

重庆市西南大学附属中学 2021-2022 学年高一下学期期末数学试题

学校:_____ 姓名:_____ 班级:_____ 考号:_____

一、单选题

1. 设 m 、 n 是两条不同的直线， α 是一个平面，下列选项中可以判定“ $m \parallel n$ ”的是 ()

A. $m \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \alpha$

B. $m \subset \alpha$ 且 $n \parallel \alpha$

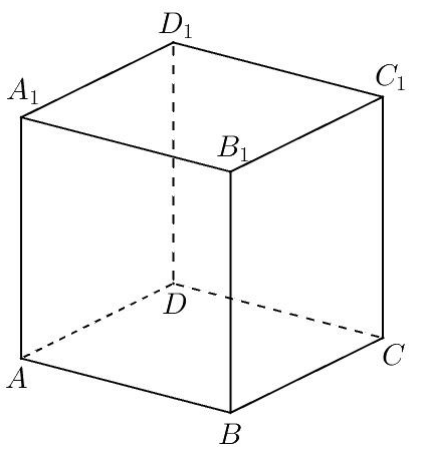
C. $m \parallel \alpha$ 且 $n \perp \alpha$

D. $m \perp \alpha$ 且 $n \perp \alpha$

【答案】D

【分析】对于选项 A、B、C 通过举例可排除，对于选项 D，根据线面垂直的关系可判断.

【详解】如图所示：正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



对于 A，取直线 n 为 D_1A_1 ，直线 m 为 C_1D_1 ，平面 α 为面 $ABCD$ ，显然 $m \parallel n$ 不成立，故 A 错误；

对于 B，取直线 n 为 D_1A_1 ，直线 m 为 AB ，平面 α 为面 $ABCD$ ，显然 $m \parallel n$ 不成立，故 B 错误；

对于 C，取直线 n 为 AA_1 ，直线 m 为 A_1B_1 ，平面 α 为面 $ABCD$ ，显然 $m \parallel n$ 不成立，故 C 错误；

对于 D，根据垂直于同一平面的两条不同直线平行可知 D 正确.

故选：D.

2. 缙云山是著名的旅游胜地. 天气预报中秋节连续三天，每天下雨的概率为 0.5，现用随机模拟的方法估计三天中至少有两天下雨的概率：先由计算器产生 0 到 9 之间的整数

值的随机数，指定 0, 1, 2, 3, 4 表示当天下雨，5, 6, 7, 8, 9 表示当天不下雨，每 3 个随机数为一组，代表三天是否下雨的结果，经随机模拟产生了 20 组随机数：

926 446 072 021 392 077 663 817 325 615

405 858 776 631 700 259 305 311 589 258

据此估计三天中至少有两天下雨的概率约为 ()

- A. 0.45 B. 0.5 C. 0.55 D. 0.6

【答案】B

【分析】根据给定数据，求出三天中至少有两天下雨的随机数组数即可计算作答.

【详解】依题意，20 组随机数中，表示三天中至少有两天下雨的随机数有：

446, 072, 021, 392, 325, 405, 631, 700, 305, 311, 共 10 组，

所以三天中至少有两天下雨的概率约为 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

故选：B

3. 将半径为 3，圆心角为 120° 的扇形围成一个圆锥，则该圆锥的体积为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{3}\pi$ C. $2\sqrt{2}\pi$ D. $4\sqrt{5}\pi$

【答案】A

【分析】利用扇形的弧长等于圆锥的底面周长求出圆锥的底面半径，利用勾股定理求出圆锥的高，即可求出圆锥的体积.

【详解】设圆锥的底面半径为 r ，则 $2\pi r = 2\pi \times 3 \times \frac{2\pi}{2\pi}$,

$\therefore r = 1$,

\therefore 圆锥的高为 $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$,

\therefore 圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

故选:A

4. 已知 A 和 B 是随机试验 E 中的两个随机事件，事件

$C = A \cup B, P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = P(\bar{C}) = \frac{1}{3}$ ，下列选项中正确的是 ()

- A. A 与 B 互斥 B. A 与 C 互斥
C. A 与 B 相互独立 D. A 与 C 相互独立

【答案】C

【分析】根据公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 可判断 A；由 $C = A \cup B$ 可判断 B；由公式 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ 先求 $P(AB)$ ，然后根据 $P(AB) = P(A)P(B)$ 可判断 C；根

据 $C = A \cup B$ 可知可知 $P(AC) = P(A)$ ，然后判断 $P(AC), P(A)P(C)$ 是否相等可判断 D.

【详解】由题知， $P(C) = \frac{2}{3}$ ，因为 $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq P(A \cup B) = P(C)$ ，故 A 错误；

因为 $C = A \cup B$ ， A 发生时 C 一定发生，故 B 错误；

因为 $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ，所以 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ，

又 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ，所以 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，故 C 正确；

因为 $C = A \cup B$ ，所以 $P(AC) = P(A) = \frac{1}{2}$ ，由 $P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ， $P(AC) \neq P(A)P(C)$ ，

故 D 错误.

故选：C

5. 已知向量 \vec{a} ， \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$ ，则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 ()

A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°

【答案】B

【分析】由向量 \vec{a} ， \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$ ，求得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{b}|$ 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，结合向量的夹角公式，即可求解.

【详解】因为向量 \vec{a} ， \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$ ，

由 $\sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$ ，可得 $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2$ ，即 $\vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{b}|^2$

又由 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}|$ ，可得 $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，

即 $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 - 3\vec{b}^2$ ，解得 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ ，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

又因为 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}$ ，

因为 $0^\circ < \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 180^\circ$ ，所以 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60^\circ$ ，即 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 60° .

故选：B.

6. 正四面体 $ABCD$ 中， E ， F 分别是 AB 和 CD 的中点，则异面直线 CE 和 AF 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【分析】连接 BF ，取 BF 的中点 O ，连接 EO ，则可得 $EO \parallel AF$ ，所以可得 $\angle OEC$ 异面有线 CE 和 AF 所成角，然后利用余弦定理求解即可

【详解】连接 BF ，取 BF 的中点 O ，连接 EO ，

因为 E 为 AB 的中点，

所以 $EO \parallel AF$ ，

所以 $\angle OEC$ 为异面直线 CE 和 AF 所成角或其补角，

设正四面体的棱长为 2，则 $AB = BC = AC = CD = AD = BD = 2$ ， $AF = CE = BF = \sqrt{3}$ ，

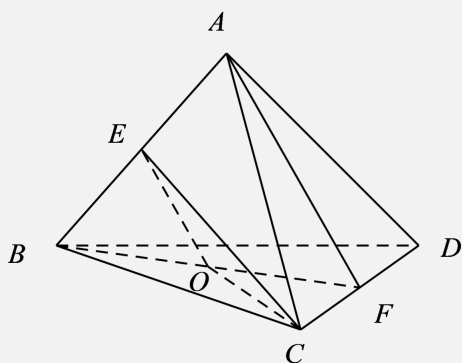
$$\text{所以 } OE = OB = OF = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad OC = \sqrt{CF^2 + OF^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

所以在 $\triangle OCE$ 中，由余弦定理得

$$\cos \angle OEC = \frac{OE^2 + CE^2 - OC^2}{2OE \cdot CE} = \frac{\frac{3}{4} + 3 - \frac{7}{4}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}} = \frac{2}{3},$$

所以异面直线 CE 和 AF 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$ ，

故选：C



7. 边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 中， M 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MF}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{15}{4}$

B. 6

C. 4

D. $\frac{13}{4}$

【答案】A

【分析】建立坐标系，利用平面向量的坐标运算结合二次函数的性质求解即可

【详解】如图：以正六边形的中心为原点， CF 所在直线为 x 轴，

AB 的垂直平分线所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，

则 $B(1, \sqrt{3})$, $F(-2, 0)$, $C(2, 0)$, $D(1, -\sqrt{3})$ ，设 $M(x, y)$ ，

则 $\overrightarrow{MB} = (1-x, \sqrt{3}-y)$, $\overrightarrow{MF} = (-2-x, -y)$ ，

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MF} = (1-x, \sqrt{3}-y) \cdot (-2-x, -y) = x^2 + x + y^2 - \sqrt{3}y - 2,$$

因为 M 为边 CD 上的动点，

所以 $\overrightarrow{MC} = \lambda \overrightarrow{DC}$, ($0 \leq \lambda \leq 1$)，即 $(2-x, -y) = \lambda(1, \sqrt{3})$ ，

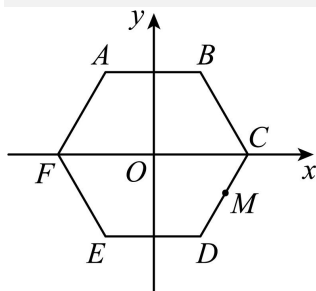
解得 $x = 2 - \lambda, y = -\sqrt{3}\lambda$

所以 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MF} = x^2 + x + y^2 - \sqrt{3}y - 2 = 4\lambda^2 - 2\lambda + 4$,

令 $f(\lambda) = 4\lambda^2 - 2\lambda + 4, (0 \leq \lambda \leq 1)$,

则结合二次函数的性质可知 $f(\lambda)_{\min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$,

故选: A



8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E 为 DD_1 中点, F 为棱 CD 上异于端点的动点, 若平面 BEF 截该正方体所得的截面为四边形, 则线段 CF 的取值范围是 ()

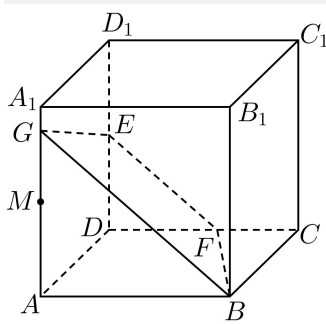
- A. $(\frac{1}{3}, 1)$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ D. $(0, \frac{1}{2}]$

【答案】D

【分析】根据给定的几何体, 利用面面平行的性质结合平面的基本事实, 探讨截面形状确定 F 点的位置, 推理计算作答.

【详解】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $BEF \cap$ 平面 $CDD_1C_1 = EF$, 而 $B \in$ 平面 ABB_1A_1 , $B \in$ 平面 BEF ,

平面 $CDD_1C_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 则平面 BEF 与平面 ABB_1A_1 的交线过点 B , 且与直线 EF 平行, 与直线 AA_1 相交, 令交点为 G , 如图,



而 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 即 $\angle EFD, \angle GBA$ 分别为 EF, GB 与平面 $ABCD$ 所成的角,

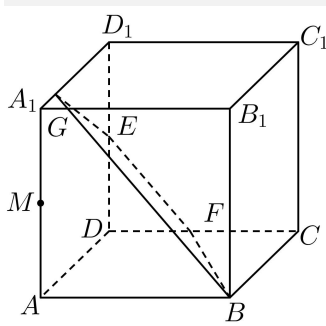
而 $EF \parallel GB$, 则 $\angle EFD = \angle GBA$, 且有 $\frac{GA}{AB} = \tan \angle GBA = \tan \angle EFD = \frac{ED}{DF}$,

当点 F 由点 C 向点 D 移动过程中, $\angle GBA$ 逐渐增大, 点 G 由 M 向点 A_1 方向移动,

当点 G 为线段 MA_1 上任意一点时, 平面 BEF 只与该正方体的 4 个表面正方形有交线, 即可围成四边形,

当点 G 在线段 MA_1 延长线上时, 直线 BG 必与棱 A_1B_1 交于除点 A_1 外的点,

而点 F 与 D 不重合, 此时, 平面 BEF 与该正方体的 5 个表面正方形有交线, 截面为五边形, 如图,



显然, $DF = \frac{AB \cdot ED}{GA} = \frac{1}{2GA} \in [\frac{1}{2}, 1)$, 则 $CF = 1 - DF \in (0, \frac{1}{2}]$,
所以线段的 CF 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}]$.

【点睛】关键点睛：作过正方体三条中点的截面，找到过三点的平面与正方体表面的交线是解决问题的关键.

9. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2x, 2-x)$, 其中 $x \in R$, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $x=6$ ；
- B. 若 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角为锐角，则 $x<6$ ；
- C. 若 $x=1$ ，则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上投影向量为 \vec{b} ；
- D. 若 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ，则 $x=\frac{2}{7}$

【答案】ACD

【分析】根据向量垂直的坐标表示直接求解可判断 A；注意向量同向不满足题意可判断 B；根据投影向量的定义直接求解，可判断 C；根据性质可知 \vec{a} 与 \vec{b} 同向，然后可判断 D.

【详解】若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x + 3(2 - x) = 0$ ，解得 $x = 6$ ，A 正确；

若 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角为锐角，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x + 3(2 - x) > 0$ ，解得 $x < 6$ ，又当 $x = \frac{2}{7}$ ， $\vec{b} = (\frac{4}{7}, \frac{12}{7})$ ，此时 $\vec{a} = \frac{7}{4}\vec{b}$ ， \vec{a} 与 \vec{b} 夹角为 0，故 B 错误；

若 $x = 1$ ，则 $\vec{b} = (2, 1)$ ，因为 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上投影为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2+3}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ ，与 \vec{b} 同向的单位向量为 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ ，所以 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上投影向量为 $\frac{\sqrt{5}\vec{b}}{|\vec{b}|} = (2, 1) = \vec{b}$ ，C 正确；

若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ，则 \vec{a} 与 \vec{b} 同向，由上可知，此时 $x = \frac{2}{7}$ ，D 正确.

故选：ACD

10. 下列说法正确的是 ()

- A. 用分层抽样法从 1000 名学生（男、女分别占 60%、40%）中抽取 100 人，则每位男生被抽中的概率为 $\frac{1}{10}$ ；
- B. 将一组数据中的每个数据都乘以 3 后，平均数也变为原来的 3 倍；
- C. 将一组数据中的每个数据都乘以 3 后，方差也变为原来的 3 倍；
- D. 一组数据 x_1, x_2, \dots, x_{100} 的平均数是 5，方差为 1，现将其中一个值为 5 的数据剔除后，余下 99 个数据的方差是 $\frac{100}{99}$.

【答案】ABD

【分析】根据分层抽样的计算规则分析 A 选项，根据平均数和方差的计算公式分析 BCD 选项.

【详解】选项 A：因为 1000 名学生中男、女分别占 60% 和 40%，根据分层抽样的计算规则，抽取的 100 人中男生占 $100 \times 60\% = 60$ 人，所以每位男生被抽中的概率

$$P = \frac{60}{1000 \times 60\%} = \frac{1}{10}. \text{A 正确；}$$

选项 B：平均数 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ ，将这组数据中每个数据都乘以 3 后

$$\frac{1}{n}(3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n) = 3 \times \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = 3\bar{x}. \text{B 正确；}$$

选项 C: 方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 每个数据都乘以 3 后平均数变为原来的 3 倍,

方差 $\frac{1}{n}[(3x_1 - 3\bar{x})^2 + (3x_2 - 3\bar{x})^2 + (3x_3 - 3\bar{x})^2 + \dots + (3x_n - 3\bar{x})^2] = 9s^2$. C 错误;

选项 D: , 因为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ 的平均数是 5, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} = 500$, 新平均数

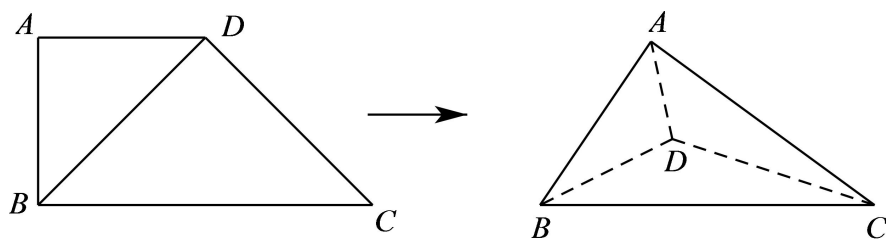
$\bar{x}' = \frac{1}{99}(500 - 5) = 5$, 又因为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ 的方差是 1, 所以

$[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{99} - \bar{x})^2 + (5 - 5)^2] = 100$, 提出一个值为 5 的数据后,

余下 99 个数的方差 $s^2 = \frac{1}{99} \times 100 = \frac{100}{99}$. D 正确.

故选: ABD.

11. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = AB = 2$, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 进行翻折, 在这一翻折过程中, 下列说法正确的是 ()



- A. 始终有 $AC \perp BD$;
- B. 当平面 $ABD \perp$ 平面 BCD 时, 平面 $ABD \perp$ 平面 ACD
- C. 当平面 $ABD \perp$ 平面 BCD 时, 直线 BC 与平面 ABD 成 45° 角;
- D. 当二面角 $A-BD-C$ 的大小为 120° 时, 三棱锥 $A-BCD$ 外接球表面积为 $\frac{56}{3}\pi$.

【答案】BCD

【分析】在平面 $ABD \perp$ 平面 BCD 的情况下, 易证 $AB \perp$ 平面 ACD , 利用反证法推出 A 错误; 通过面面垂直判定定理可得 B 正确; 找出直线 BC 与平面 ABD 所成角为 $\angle DBC = 45^\circ$ 即可判断 C 正确; 通过找出棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心应在过 N 点与平面 BCD 垂直的直线上, 并通过运算求出球半径, 再求出三棱锥 $A-BCD$ 外接球表面积为 $\frac{56}{3}\pi$, 可判定 D 正确.

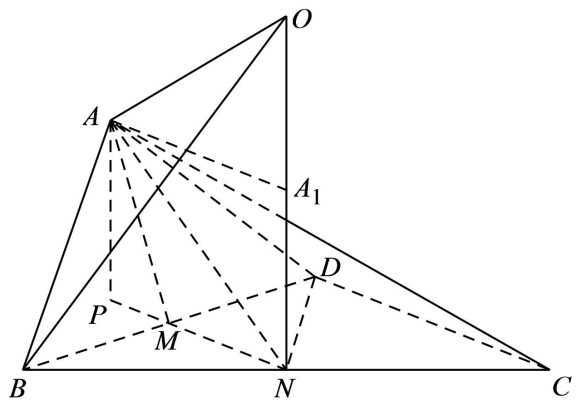
【详解】在四边形 $ABCD$ 中, 由已知可得: $BD \perp DC$, $\angle DBC = 45^\circ$.

当平面 $ABD \perp$ 平面 BCD 时, 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$ 且 $CD \perp BD$, 因此可得: $CD \perp$ 平面 ABD . 又 $AB \subset$ 平面 ABD , 所以 $CD \perp AB$. 因为 $AD \perp AB$, $AD \cap CD =$ 点 D , $AD \subset$ 平面 ACD , $CD \subset$ 平面 ACD , $AB \not\subset$ 平面 ACD , 可得 $AB \perp$ 平面 ACD .

若假设 $AC \perp BD$ ，又 $BD \perp DC$ ，则 $BD \perp$ 平面 ACD ，可得 $AB \parallel BD$ ，与 $AB \cap BD = \text{点 } B$ 矛盾，故 A 错误；

又 $AB \subset$ 平面 ABD ，可得平面 $ABD \perp$ 平面 ACD ，故 B 正确；

由 $CD \perp$ 平面 ABD ，则 $\angle DBC$ 为直线 BC 与平面 ABD 所成的角是 45° ，故 C 正确；



分别取 BD, BC 中点 M, N ，连接 AM, MN, AN ，延长 NM 过 A 作 $AP \perp NM$ ，由已知易得：
 $\angle AMN$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 120° ， $AP \perp$ 平面 BCD ，可求得： $AM = MN = \sqrt{2}$ ，

$$AN = \sqrt{6}, \quad AP = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad NP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

又 $BD \perp DC$ ，易知三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心应在过 N 点与平面 BCD 垂直的直线

上，过 N 作 $NO \perp$ 平面 BCD ，且 O 为球心，过 A 作 $AA_1 \perp NO$ ，则 $AP = A_1N = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

$$AA_1 = NP = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

设 NO 为 x ，半径为 R ，

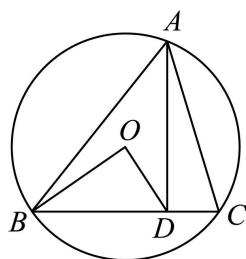
$$\text{则在 } Rt\triangle AA_1O \text{ 中: } R^2 = AO^2 = AA_1^2 + A_1O^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}^2 + x - \frac{\sqrt{6}}{2}^2$$

$$\text{在 } Rt\triangle BNO \text{ 中: } R^2 = BO^2 = BN^2 + NO^2 = (2)^2 + x^2 \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad R^2 = \frac{14}{3}$$

因此可得到三棱锥 $A-BCD$ 外接球表面积 $S = 4\pi \times \frac{14}{3} = \frac{56\pi}{3}$ ，故 D 正确.

故选：BCD.

12. 锐角 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，其外接圆 O 的半径 $R = \sqrt{3}$ ，点 D 在边 BC 上，且 $BD = 2DC = 2$ ，则下列判断正确的是（ ）



A. $A = 60^\circ$

B. $\triangle BOD$ 为直角三角形

C. $\triangle ABC$ 周长的取值范围是 $(3, 9]$

D. AD 的最大值为 $1 + \sqrt{3}$

【答案】ABD

【分析】由正弦定理可判断 A；在 $\triangle OBC$ 中利用余弦定理求 $\angle OBC$ ，再在 $\triangle OBD$ 中，由余弦定理得 OD ，然后由勾股定理可判断 B；利用正弦定理将 $\triangle ABC$ 周长转化为三角函数，然后求值域可判断 C；数形结合可判断 D.

【详解】由题知， $BC = 3$ ，由正弦定理可得 $\sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $A = 60^\circ$ ，A 正确；

连接 OC ，在 $\triangle OBC$ 中由余弦定理可得 $\cos \angle OBC = \frac{3+9-3}{2 \times 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，又 $\cos \angle OBC \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

所以 $\angle OBC = \frac{\pi}{6}$ ，

在 $\triangle OBD$ 中，由余弦定理得 $OD^2 = 3 + 4 - 2 \times 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 1$ ，所以 $OB^2 + OD^2 = BD^2 = 4$ ，

即 $OB \perp OD$ ，故 B 正确；

$\triangle ABC$ 周长 $L = 3 + 2\sqrt{3} \sin B + 2\sqrt{3} \sin C = 3 + 2\sqrt{3} \sin B + 2\sqrt{3} \sin(\frac{2\pi}{3} - B)$

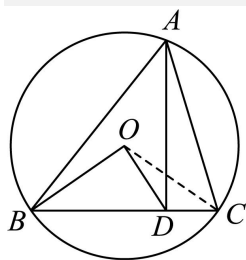
$= 3 + 2\sqrt{3}(\frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B) = 3 + 6 \sin(B + \frac{\pi}{6})$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $\begin{cases} \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \\ B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，所以 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$ ，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin(B + \frac{\pi}{6}) \leq 1$ ，所以 $3 + 3\sqrt{3} < 3 + 6 \sin(B + \frac{\pi}{6}) \leq 9$ ，故 C 错误；

易知，当 A 、 O 、 D 三点共线时取得最大值，所以 AD 的最大值为 $R + OD = \sqrt{3} + 1$ ，D 正确.

故选：ABD



三、填空题

13. 已知 $i-1$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 的一个根, 那么该方程在复数集 C 内的另一个根是_____.

【答案】 $-1-i$

【分析】 根据方程根的定义, 将 $i-1$ 代入原方程, 解得 m 的值, 再利用配方法解方程, 可得答案.

【详解】 已知 $i-1$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 的一个根, 则

$$(i-1)^2 + m(i-1) + 2 = 0,$$

$$\text{即 } i^2 - 2i + 1 + mi - m + 2 = 0, \text{ 则 } 2 - m + (m-2)i = 0, \text{ 可得 } m = 2,$$

$$\text{可得方程: } x^2 + 2x + 2 = 0, \text{ 由配方法可得: } (x+1)^2 = -1, \text{ 解得: } x = -1 \pm i,$$

故答案为: $-1-i$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$, 则角 $A =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

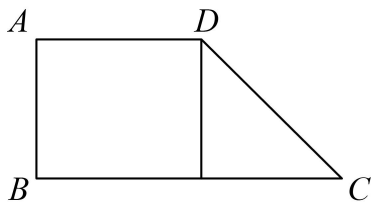
【分析】 通过三角形的面积公式, 再结合余弦定理即可求得答案.

【详解】 由题意, $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \sin A$, 由余弦定理可知:

$$\cos A = \sin A \Rightarrow \sqrt{2} \sin \left(A - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \text{ 因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{4}.$$

故答案为: $\frac{\pi}{4}$.

15. 如图, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AD = \frac{1}{2}BC = 1$, 该梯形绕 AB 旋转形成的几何体体积为 $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$, 则该几何体的侧面积为_____.



【答案】 6π

【分析】 先由圆台体积公式求圆台的高, 然后由侧面积公式可得.

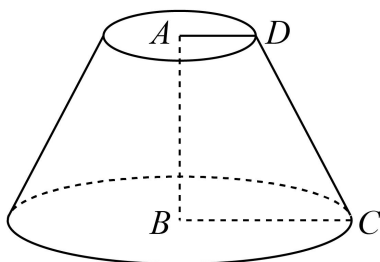
【详解】 由题知, 该几何体为圆台, 上底 $S' = \pi$, 下底 $S = 4\pi$

$$\text{所以 } \frac{1}{3}(\pi + 4\pi + \sqrt{4\pi^2}) \cdot AB = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3}, \text{ 解得 } AB = \sqrt{3}$$

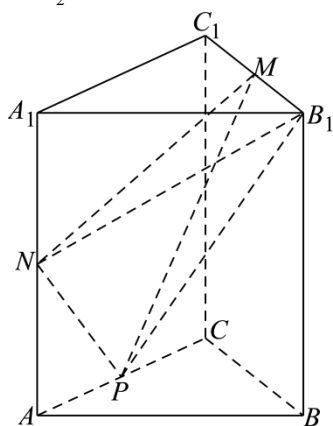
所以 $CD = 2$

则圆台的侧面积为 $\frac{1}{2}(2\pi + 4\pi) \cdot 2 = 6\pi$

故答案为： 6π



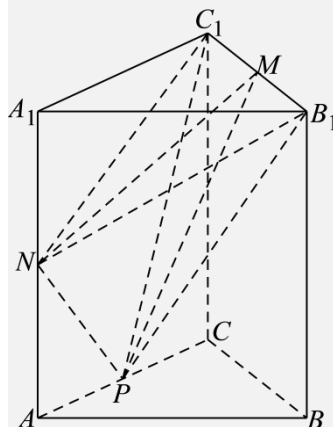
16. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = \frac{\sqrt{2}}{2}AA_1$, M 、 N 、 P 分别是 B_1C_1 、 AA_1 、 AC 的中点, 若三棱锥 $P-MNB_1$ 的体积为 V , 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{8}/0.125$

【分析】连接 PC_1 、 C_1N , 设 $AA_1 = \sqrt{2}$, 计算出 V_1 、 V_2 , 即可得解.

【详解】连接 PC_1 、 C_1N , 设 $AA_1 = \sqrt{2}$, 则 $S_{\triangle PNC_1} = S_{\text{矩形}AA_1C_1C} - S_{\triangle APN} - S_{\triangle A_1NC_1} - S_{\triangle PCC_1}$
 $= \sqrt{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8},$



因为 $AC \perp BC$, 则 $B_1C_1 \perp A_1C_1$,

$\because CC_1 \perp \text{平面 } A_1B_1C_1, B_1C_1 \subset \text{平面 } A_1B_1C_1, \therefore B_1C_1 \perp CC_1,$

$\because A_1C_1 \cap CC_1 = C_1, A_1C_1, CC_1 \subset \text{平面 } AA_1C_1C, \therefore B_1C_1 \perp \text{平面 } AA_1C_1C,$

所以, $V_1 = V_{B_1-PMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle PNC_1} \cdot B_1C_1 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16},$

$V_2 = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$ 故 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}.$

故答案为: $\frac{1}{8}.$

四、解答题

17. 一个盒子里有三张卡片, 分别标记有数字 1, 2, 3, 这三张卡片除标记的数字外完全相同. 随机有放回地抽取 3 次, 每次抽取 1 张.

(1) 求“抽取的卡片上的数字之和为 5”的概率;

(2) 求“抽取的卡片上的数字不完全相同”的概率.

【答案】(1) $\frac{2}{9}$

(2) $\frac{8}{9}$

【分析】(1) 先列举, 再由古典概型的概率公式求解即可;

(2) 先列举, 再由对立事件与古典概型的概率公式求解即可;

(1)

将 3 张卡片有放回的抽取 3 次, 每次抽 1 张, 共有 27 个基本事件:

$\{1,1,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,2,1\}, \{1,2,2\}, \{1,2,3\}, \{1,3,1\}, \{1,3,2\}, \{1,3,3\},$

$\{2,1,1\}, \{2,1,2\}, \{2,1,3\}, \{2,2,1\}, \{2,2,2\}, \{2,2,3\}, \{2,3,1\}, \{2,3,2\}, \{2,3,3\},$

$\{3,1,1\}, \{3,1,2\}, \{3,1,3\}, \{3,2,1\}, \{3,2,2\}, \{3,2,3\}, \{3,3,1\}, \{3,3,2\}, \{3,3,3\},$

记事件 A 为“抽取的卡片上的数字之和为 5”,

则 A 共包含 $\{1,1,3\}, \{1,2,2\}, \{1,3,1\}, \{2,1,2\}, \{2,2,1\}, \{3,1,1\}$, 6 个基本事件,

所以 $P(A) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9},$

所以“抽取的卡片上的数字之和为 5”的概率为 $\frac{2}{9};$

(2)

记事件 B 为“抽取的卡片上的数字不完全相同”,

则其对立事件 C 为“抽取的卡片上的数字完全相同”,

其中 C 包含 $\{1,1,1\}$, $\{2,2,2\}$, $\{3,3,3\}$, 3 个基本事件,

$$\text{所以 } P(B) = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{27} = \frac{8}{9},$$

所以“抽取的卡片上的数字不完全相同”的概率为 $\frac{8}{9}$

18. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , _____.

$$\textcircled{1} \sqrt{3}a - \sqrt{3}c \cos B + b \sin C = 0; \textcircled{2} \frac{a-c}{a+b} + \frac{\sin B}{\sin A + \sin C} = 0; \textcircled{3} 2\cos^2 \frac{A+B}{2} + \cos 2C - 1 = 0.$$

请在以上三个条件中任选一个补充在横线处, 并解答:

(1) 求角 C 的值;

$$(2) \text{若 } c = 2\sqrt{3}, \overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} \text{ 且 } |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}, \text{ 求 } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \text{ 的值.}$$

【答案】(1) $\frac{2\pi}{3}$

(2) -1

【分析】(1) 若选 $\textcircled{1}$, 由正弦定理及正弦的两角和可得, 若选 $\textcircled{2}$, 由正弦定理及余弦定理可得, 若选 $\textcircled{3}$, 由余弦的二倍角公式可得;

(2) 由平面向量的数量积及余弦定理可求解.

【详解】(1) 若选 $\textcircled{1}$, 由已知有 $\sqrt{3} \sin A - \sqrt{3} \sin C \cos B + \sin B \sin C = 0$, 又因为, 在 $\triangle ABC$ 中, 有 $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,

$$\text{所以有 } \sqrt{3}(\sin B \cos C + \cos B \sin C) - \sqrt{3} \sin C \cos B + \sin B \sin C = 0,$$

$$\text{化简得 } \sqrt{3} \sin B \cos C + \sin B \sin C = 0, \text{ 由于 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } \sin B \neq 0,$$

$$\text{所以有 } \sqrt{3} \cos C + \sin C = 0, \text{ 于是有 } \tan C = -\sqrt{3}, \text{ 因 } 0 < C < \pi, \text{ 所以得 } C = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{若选}\textcircled{2}, \text{ 由 } \frac{a-c}{a+b} + \frac{\sin B}{\sin A + \sin C} = 0,$$

$$\text{得 } \frac{a-c}{a+b} + \frac{b}{a+c} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -ab \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因 } 0 < C < \pi, \text{ 所以 } C = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{若选}\textcircled{3}, \text{ 由 } 2\cos^2 \frac{A+B}{2} + \cos 2C - 1 = 0,$$

$$\text{有 } \cos(A+B) + \cos 2C = 0 \Rightarrow 2\cos^2 C - \cos C - 1 = 0,$$

$$\text{从而有 } (\cos C - 1)(2\cos C + 1) = 0, \text{ 解得 } \cos C = -\frac{1}{2} \text{ 或 } \cos C = 1 \text{ (舍) (因为 } 0 < C < \pi),$$

$$\text{所以 } C = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 由 $\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$, 可得点 D 为 AB 的中点, 且有 $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$,

所以有 $\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 4\overrightarrow{CD}^2 = 8$,

若 $c = 2\sqrt{3}$, 则 $AD = BD = \sqrt{3}$,

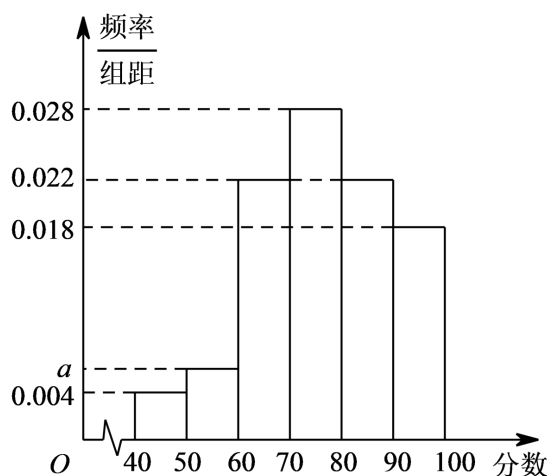
又 $\angle ADC + \angle BDC = \pi$,

所以 $\cos \angle ADC + \cos \angle BDC = \frac{5 - \overrightarrow{CA}^2}{2\sqrt{6}} + \frac{5 - \overrightarrow{CB}^2}{2\sqrt{6}} = 0$,

从而可得 $\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = 10$,

所以有 $10 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 8$, 可得 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -1$.

19. 我校后勤服务中心为监控学校稻香圆食堂的服务质量情况, 每学期会定期进行两次食堂服务质量抽样调查, 每次调查的具体做法是: 随机调查 50 名就餐的教师和学生, 请他们为食堂服务质量进行评分, 师生根据自己的感受从 0 到 100 分选取一个分数打分, 根据这 50 名师生对食堂服务质量的评分并绘制频率分布直方图. 下图是根据本学期第二次抽样调查师生打分结果绘制的频率分布直方图, 其中样本数据分组为 $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$.



(1) 求频率分布直方图中 a 的值并估计样本的众数:

(2) 学校规定: 师生对食堂服务质量的评分平均分不得低于 75 分, 否则将进行内部整顿. 用每组数据的中点值代替该组数据, 试估计该校师生对食堂服务质量评分的平均分, 并据此回答食堂是否需要进行内部整顿;

(3) 我校每周都会随机抽取 3 名学生和校长共进午餐, 每次校长都会通过这 3 名学生了解食堂服务质量, 校长的做法是让学生在“差评、中评、好评”中选择一个作答, 如果出现“差评”或者“没有出现好评”, 校长会立即责成后勤分管副校长亲自检查食堂服务情况. 若以本次抽取的 50 名学生样本频率分布直方图作为总体估计的依据, 并假定本周

和校长共进午餐的学生中 评分在 $[40, 60)$ 之间的会给“差评”，评分在 $[60, 80)$ 之间的会给“中评”，评分在 $[80, 100]$ 之间的会给“好评”，已知学生都会根据自己的感受独立地给出评价不会受到其它因素的影响，试估计本周校长会责成后勤分管副校长亲自检查食堂服务质量的概率.

【答案】(1) $a = 0.006$ ；75；

(2) $\bar{x} = 76.2 > 75$ ，所以食堂不需要内部整顿.

(3)0.396

【分析】(1) 根据小矩形的面积之和等于1 求出 a 的值；再根据众数为所有小矩形的面积最多时的那组的分数即可求解.

(2) 根据平均数等于各小矩形的面积乘以等边中点横坐标之和即可求解.

(3) 分别先求出 $[40, 60)$ 、 $[60, 80)$ 、 $[80, 100]$ 的频率，再记校长不会责成后勤分管副校长亲自检查食堂服务质量为事件 A , 求出 $P(A)$ ，再通过对立事件 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 即可求出概率.

【详解】(1) 由 $(0.004 + a + 0.022 + 0.028 + 0.022 + 0.018) \times 10 = 1$ ，解得 $a = 0.006$.

该组数据的众数在分数为 $[70, 80]$ 这一组，取中点值为75分，即众数为75

(2) 由题中数据可得对食堂服务质量评分的平均分为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 45 \times 0.004 \times 10 + 55 \times 0.006 \times 10 + 65 \times 0.022 \times 10 \\ &+ 75 \times 0.028 \times 10 + 85 \times 0.022 \times 10 + 95 \times 0.018 \times 10 = 76.2\end{aligned}$$

因为 $76.2 > 75$ ，所以食堂不需要内部整顿.

(3) 由图可知， $[40, 60)$ 、 $[60, 80)$ 、 $[80, 100]$ 这三组的频率分别为0.1、0.5、0.4；用频率估计概率，即差评、中评、好评的概率分别为0.1、0.5、0.4；

以本次抽取的3名学生，让学生在“差评、中评、好评”中选择一个作答，已知学生都会根据自己的感受独立地给出评价不会受到其它因素的影响，记3名学生分别为甲、乙、丙；

设本周校长不会责成后勤分管副校长亲自检查食堂服务质量的事件记为 A ，则

A 事件即为：甲好评乙丙中评、甲乙好评丙中评、甲丙好评乙中评、乙好评甲丙中评、乙丙好评甲中评、丙好评甲乙中评、甲乙丙都好评；即

$$\begin{aligned}P(A) &= 0.4 \times 0.5 \times 0.5 + 0.4 \times 0.4 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.4 \times 0.5 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4 \\ &+ 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.604\end{aligned}$$

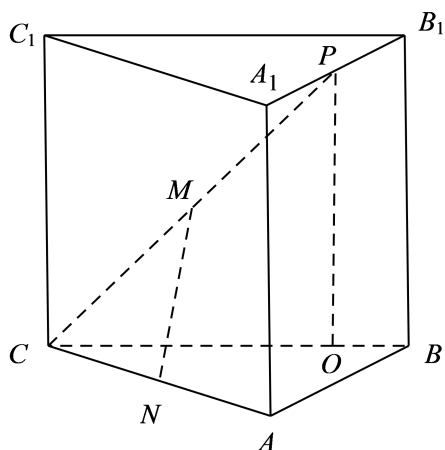
$$\therefore P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.604 = 0.396.$$

即本周校长会责成后勤分管副校长亲自检查食堂服务质量的概率为 0.396.

20. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是等腰直角三角形, 侧面 BB_1C_1C 是矩形,

$\angle CAB = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1$, 点 P 是棱 A_1B_1 的中点, 且 P 在平面 ABC 内的射影 O 在

线段 BC 上, $BO = \frac{1}{4}BC$, 点 M, N 分别是线段 CP, CA 的中点



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 AA_1B_1B

(2) 求二面角 $M-AC-B$ 的正切值.

【答案】(1) 见解析

(2) $\frac{\sqrt{14}}{3}$

【分析】(1) 连接 AP , 则由三角形中位线定理可得 $MN \parallel AP$, 然后利用线面平行的判定定理可证得结论,

(2) 连接 OB_1 , 取 CO 的中点 E , 连接 ME , 过点 E 作 $EF \perp AC$ 于 F , 连接 MF , 可证得 $\angle MFE$ 为二面角 $M-AC-B$ 的平面角, 然后计算即可

(1)

证明: 连接 AP ,

因为 M, N 分别是线段 CP, CA 的中点,

所以 $MN \parallel AP$,

因为 $MN \not\subset$ 平面 AA_1B_1B , $AP \subset$ 平面 AA_1B_1B ,

所以 $MN \parallel$ 平面 AA_1B_1B ,

(2)

解：连接 OB_1 ，取 CO 的中点 E ，连接 ME ，过点 E 作 $EF \perp AC$ 于 F ，连接 MF ，

因为 M ，是线段 CP 的中点，所以 $ME \parallel OP$ ， $ME = \frac{1}{2}OP$ ，

因为 $OP \perp$ 平面 ABC ，所以 $ME \perp$ 平面 ABC ，

因为 $AC \subset$ 平面 ABC ，所以 $ME \perp AC$ ，

因为 $ME \cap EF = E$ ，

所以 $AC \perp$ 平面 MEF ，

因为 $MF \subset$ 平面 MEF ，所以 $AC \perp MF$ ，

所以 $\angle MFE$ 为二面角 $M-AC-B$ 的平面角，

设 $AB = AC = AA_1 = 2$ ，

因为 $\angle CAB = 90^\circ$ ，所以 $BC = 2\sqrt{2}$ ，

所以 $BO = \frac{1}{4}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $CO = \frac{3}{4}BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $CE = \frac{1}{2}CO = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ，

$EF = CE \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OBB_1$ 中， $OB_1^2 = OB^2 + BB_1^2 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$ ，

因为 $OP \perp$ 平面 ABC ，平面 $ABC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，

所以 $OP \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，

因为 $A_1B_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，

所以 $OP \perp A_1B_1$ ，

所以 $OP = \sqrt{OB_1^2 - PB_1^2} = \sqrt{\frac{9}{2} - 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ ，

所以 $ME = \frac{1}{2}OP = \frac{\sqrt{14}}{4}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle MEF$ 中， $\tan \angle MEF = \frac{ME}{EF} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$ ，

所以二面角 $M-AC-B$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{14}}{3}$

所以 $CM \perp BC$,

因为 $CM \perp BC$, $SM \perp BC$, $SM \perp CM = M$,

$SM \subset$ 平面 SCM , $CM \subset$ 平面 SCM ,

所以 $BC \perp$ 平面 SCM ,

因为 $BC \subset$ 平面 SBC ,

所以平面 $SBC \perp$ 平面 SCM ,

(2) 取 BS 的中点 N , 连接 AN , 又 $SA = AB$,

所以 $AN \perp BS$,

又平面 $SAB \perp$ 平面 SBC , 平面 $SAB \cap$ 平面 $SBC = SB$, $AN \subset$ 平面 SAB ,

所以 $AN \perp$ 平面 SBC ,

又 AB 与平面 SBC 所成的角为 30° ,

所以 $\angle ABN = 30^\circ$,

又 $AB = 2$, $AN \perp BN$,

所以 $AN = 1$, $BN = \sqrt{3}$, $BS = 2\sqrt{3}$,

由 (1) 知 $BC \perp$ 平面 SCM , 又 $SC \subset$ 平面 SBC ,

所以 $BC \perp SC$,

又 $BS = 2\sqrt{3}$, $BC = 2$,

所以 $CS = \sqrt{BS^2 - BC^2} = 2\sqrt{2}$,

取 CS 的中点 E , 连接 AE , DE ,

因为 $SA = AC = CD = SD$,

所以 $AE \perp CS$, $DE \perp CS$,

所以 $\angle AED$ 是二面角 $A - SC = D$ 的平面角 ,

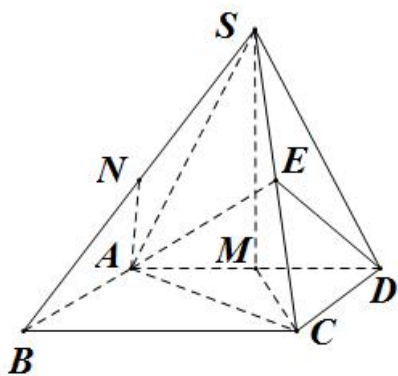
又 $AC = CD = 2$, $CE = \frac{1}{2}CS = \sqrt{2}$,

所以 $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$, $DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{2}$,

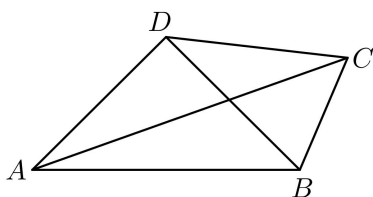
又 $AE^2 + DE^2 = 2 + 2 = 4 = AD^2$,

所以 $AE \perp DE$, 即 $\angle AED = 90^\circ$,

所以二面角 $A - SC = D$ 的大小为 90° ,



22. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AD = BD, \angle ADB = 90^\circ, CD = 2\sqrt{2}, BC = 2$.



(1) 若 $\angle BDC = 45^\circ$, 求线段 AC 的长;

(2) 求线段 AC 长的最大值.

【答案】 (1) $2\sqrt{5}$;

(2) 6.

【分析】 (1) 根据给定条件, 利用余弦定理求出 BD , 再利用余弦定理计算作答.

(2) 设 $\angle BCD = \theta (0 < \theta < \pi)$, 在 $\triangle BCD$ 中用余弦定理求出 BD , 用正弦定理表示出 $\angle CDB$, 再在 $\triangle ADC$ 中, 利用余弦定理列式求解作答.

【详解】 (1) 在 $\triangle BCD$ 中, $CD = 2\sqrt{2}, BC = 2, \angle BDC = 45^\circ$, 由余弦定理得:

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2CD \cdot BD \cos \angle BDC, \text{ 即 } BD^2 - 4BD + 4 = 0, \text{ 解得 } BD = 2,$$

在 $\triangle ADC$ 中, $AD = BD = 2, \angle ADC = 135^\circ$, 由余弦定理得:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC,$$

$$\text{所以 } AC = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})} = 2\sqrt{5}.$$

(2) 设 $\angle BCD = \theta (0 < \theta < \pi)$,

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得: $BD = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} \cos \theta} = \sqrt{12 - 8\sqrt{2} \cos \theta},$

由正弦定理得: $\sin \angle BDC = \frac{BC \sin \theta}{BD} = \frac{2 \sin \theta}{BD}, \quad AD = BD = \sqrt{12 - 8\sqrt{2} \cos \theta},$

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得： $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos\left(\frac{\pi}{2} + \angle BDC\right)$

$$= 12 - 8\sqrt{2} \cos \theta + 8 + 4\sqrt{2}BD \sin \angle BDC = 20 + 8\sqrt{2}(\sin \theta - \cos \theta) = 20 + 16 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 36,$$

当且仅当 $\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 时取“=”，此时 $AC = 6$ ，

所以当 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 时，线段 AC 长取最大值 6.

【点睛】方法点睛：三角形中已知两边及一边对角求第三边，可以利用余弦定理建立关于第三边的一元二次方程求解.