西南大学附中 2022—2023 学年度下期期末考试

高一数学答案

一、单项选择题：每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	C	A	B	C	C

二、多项选择题：每小题 5 分，共 20 分.

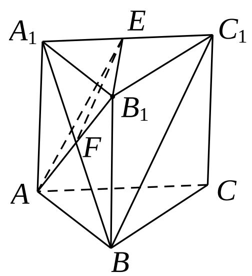
题号	9	10	11	12
答案	AB	BCD	ACD	ACD

三、填空题：每小题 5 分，共 20 分.

题号	13	14	15	16
答案	3	$\sqrt{10}$	100π	$\sqrt{3}$

四、解答题：

17．解：(1) 连接 A_1B 交 AB_1 于点 F，连接 EF，



则在正方形 ABB_1A_1 中，F 为 A_1B 的中点，

又 E 为 A_1C_1 的中点，所以 EF 为 ΔA_1BC_1 的中位线，则 $EF /\!/ BC_1$；

又 $EF \subset$ 平面 AB_1E，$BC_1 \not\subset$ 平面 AB_1E，

所以 $BC_1 /\!/$ 平面 AB_1E.

(2) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，则 $AC /\!/ A_1C_1$，则 $\angle A_1C_1B$（或其补角）为异面直线 BC_1 与 AC 所成的角.

在 ΔA_1BC_1 中，$A_1C_1=1$，$A_1B=\sqrt{2}$，$BC_1=\sqrt{2}$，则 $\cos\angle A_1C_1B=\dfrac{A_1C_1^2+BC_1^2-A_1B^2}{2A_1C_1\cdot BC_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

所以异面直线 BC_1 和 AC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

18．解：(1) 因为 $c\cos A+a\cos C=\dfrac{b}{2\cos B}$，

由正弦定理得：$\sin C\cos A+\sin A\cos C=\dfrac{\sin B}{2\cos B}$，

即 $\sin(A+C)=\dfrac{\sin B}{2\cos B}$，$\sin B=\dfrac{\sin B}{2\cos B}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$；

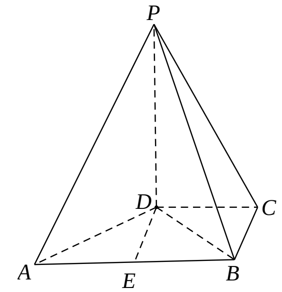
(2) 因为 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$，解得 $ac=4$，

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，则 $b^2=(a+c)^2-3ac=24$，

所以 $b=2\sqrt{6}$.

19．解：(1) 取 AB 的中点 E，连接 DB，DE，

$Rt\Delta DCB$ 中，$DB=\sqrt{2}$，梯形 $ABCD$ 中，$DC /\!/ BE$，$DC=BE$，所以四边形 $BCDE$ 为正方形，



所以 $DE=BE=1$，则 $AE=AB-BE=1$，

所以 $Rt\Delta ADE$ 中，$AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=\sqrt{2}$，

又 $AB=2$，所以 $AB^2=BD^2+AD^2$，则 $AD\perp BD$，

又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AD\perp PD$，

由于 $PD\cap BD=D$，所以 $AD\perp$ 平面 PBD，

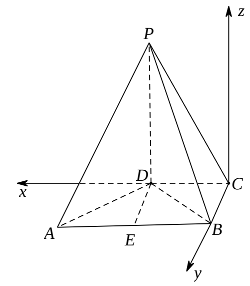
又 $PB\subset$ 平面 PBD，所以 $AD\perp PB$.

(2) 以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CB}$ 为 x 轴，y 轴正方向，在平面 PCD 内过点 C 作 CD 的垂线为 z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$P(1,0,2)$，$A(2,1,0)$，$B(0,1,0)$，$\overrightarrow{PA}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{CP}=(1,0,2)$，

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y-2z=0\\ -2x=0\end{cases}$，



令 $y=2$，则 $\vec{n}=(0,2,1)$，

设直线 PC 与平面 PAB 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}$.

20．解：(1) 在 ΔABC 中由余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，

即 $BC^2+3BC-4=0$，解得 $BC=-4$（舍）或 $BC=1$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 1\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

(2) 因为 $\angle BAC=\theta$，$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle BCD=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$\angle ACB=\frac{1}{3}\pi-\theta$，$\angle ACD=\frac{1}{3}\pi+\theta$，$\angle ADC=\frac{1}{2}\pi-\theta$，

在ΔABC中，由正弦定理得：$\frac{BC}{\sin\theta}=\frac{AC}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，所以$\frac{BC}{AC}=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}$.

在ΔACD中，由正弦定理得：$\frac{\sqrt{3}BC}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{AC}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}$，$\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2\sqrt{3}\cos\theta}$，

所以$4\sin\theta\cos\theta=1$，即$\sin 2\theta=\frac{1}{2}$，

因为$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，所以$0<2\theta<\frac{2\pi}{3}$，所以$2\theta=\frac{\pi}{6}$，即$\theta=\frac{\pi}{12}$.

21．解：(1) 由题意得$AE\perp CE$，$AE\perp BE$，
又$BE\cap CE=E$，$CE\subset$平面BCE，$BE\subset$平面BCE，
所以$AE\perp$平面BCE，又$AE\subset$平面AEB，
所以平面$AEB\perp$平面BCE，
(2) 由$AE\perp CE$，$AE\perp BE$，则$\angle CEB$为二面角$B-AE-C$的平面角，所以$\angle CEB=30^\circ$，

又$BE=2$，$CE=\sqrt{3}$，所以$BC=1$.

以E为坐标原点，$\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}$分别为$x,y$轴正方向，在平面$BCE$内过点$E$作$BE$的垂线为$z$轴, 建立如图所示的空间直角坐标系，

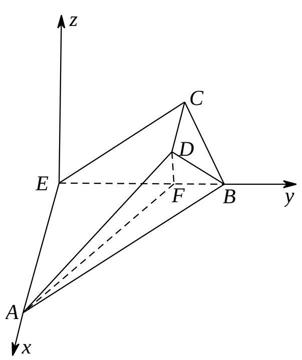
则$E(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$D(1,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{EB}=(0,2,0)$，

则$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{EB}=(0,2\lambda,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AE}=(-2,0,0)$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=(-2,0,0)+(0,2\lambda,0)=(-2,2\lambda,0)$.

设平面ADE的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}-x+\frac{3y}{2}+\frac{\sqrt{3}z}{2}=0\\ -2x=0\end{cases}$



令$y=1$，则$\vec{m}=(0,1,-\sqrt{3})$，

设平面ADF的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+\frac{3y}{2}+\frac{\sqrt{3}z}{2}=0\\ -2x+2\lambda y=0\end{cases}$

令$y=1$，则$\vec{n}=(\lambda,1,-\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}\lambda}{3})$，

则$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{4-2\lambda}{2\times\sqrt{\frac{7}{3}\lambda^2-4\lambda+4}}$，

又由二面角$E-AD-F$为30°，

则$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\frac{|4-2\lambda|}{2\times\sqrt{\frac{7}{3}\lambda^2-4\lambda+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$3\lambda^2+4\lambda-4=0$

则$\lambda=-2$（舍）或$\lambda=\frac{2}{3}$.

所以λ的值为$\frac{2}{3}$.

22．解：(1)因为$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

所以$ac\cos B+2ab\cos C-bc\cos A=0$

即$ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，

整理可得$c^2=2a^2$，即$c=\sqrt{2}a$，

则$\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

(2) $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\sin B$，由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=3a^2-2\sqrt{2}a^2\cos B$，

所以$\frac{2S}{b^2}=\frac{\sqrt{2}a^2\sin B}{3a^2-2\sqrt{2}a^2\cos B}=\frac{\sqrt{2}\sin B}{3-2\sqrt{2}\cos B}$，

令$\frac{2S}{b^2}=y>0$，即$\frac{\sqrt{2}\sin B}{3-2\sqrt{2}\cos B}=y$，

可得$3y=\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}y\cos B=\sqrt{2+8y^2}\sin(B+\varphi)\le\sqrt{2+8y^2}$，$\varphi$为锐角，且$\tan\varphi=2y$，

所以$9y^2\le 2+8y^2$，解得$0<y\le\sqrt{2}$，此时$\tan\varphi=2\sqrt{2}$，当$B=\frac{\pi}{2}-\varphi$时，y取得最大值$\sqrt{2}$.

故$\frac{2S}{b^2}$的最大值为$\sqrt{2}$.