

西南大学附中 2022—2023 学年度下期期末考试

高一数学试题

(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生保存, 以备评讲)。

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $(2+z)i=1$, 则 $z=(\quad)$

- A. $-2+i$ B. $2+i$ C. $-2-i$ D. $2-i$

2. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a=3, b=\sqrt{3}, A=60^\circ$, 则 $B=(\quad)$

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

3. 若平面 α 和直线 a, b 满足 $a \cap \alpha = A, b \subset \alpha$, 则 a 与 b 的位置关系是 (\quad)

- A. 相交 B. 平行 C. 异面 D. 相交或异面

4. 若向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=2, |\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b}=4$, 则 $|\vec{b}|=(\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5. 正四棱台的上、下底面边长分别为 2, 4, 侧棱长为 $\sqrt{3}$, 则该四棱台的体积为 (\quad)

- A. $\frac{28}{3}$ B. 28 C. $\frac{56}{3}$ D. 56

6. $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 上一点且满足 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, 若 P 为线段 CD 上一点, 且满足

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ (λ, μ 为正实数), 则 $\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 的最小值为 (\quad)

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

7. M 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2$, 则动点 M 的轨迹必通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 垂心 B. 内心 C. 外心 D. 重心

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB=1$, $BC=\sqrt{3}$, E 为 PD 的中点, 点 N 在平面 PAC 内, 且 $NE \perp$ 平面 PAC , 则点 N 到平面 PAB 的距离为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{8}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知圆锥顶点为 S , 底面圆心为 O , AC 为底面的直径, $AC=6$, SA 与底面所成的角为 60° , 则 ()

- A. $SO=3\sqrt{3}$ B. 该圆锥的母线长为 6
C. 该圆锥的体积为 $27\sqrt{3}\pi$ D. 该圆锥的侧面积为 36π

10. 已知复数 z_1, z_2 , 则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $z_1=\pm z_2$ B. 若 z_1 和 z_2 互为共轭复数, 则 $|z_1|=|z_2|$
C. 若 $|z_1-z_2|=0$, 则 $z_1=z_2$ D. $z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a:b:c=3:4:5$, O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\cos A = \sin B$
B. 若 $a=3$, 则 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 2
C. 若 $b=4$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -9$
D. 若 $b=4$, $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $S_{\triangle AOC} = 2$

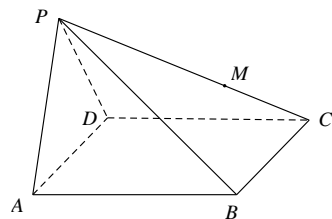
12. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 PAD 为等边三角形， $PA=2$ ，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 M 在线段 PC 上运动（不含端点），则（ ）

A. 平面 $PAD \perp$ 平面 PCD

B. 存在点 M 使得 $BD \perp AM$

C. 当 M 为线段 PC 中点时，过点 A, D, M 的平面交 PB 于点 N ，则四边形 $ADMN$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$

D. $BM + AM$ 的最小值为 4



三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，若 $a-2+(a-3)i$ (i 为虚数单位) 是实数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 $\vec{a} = (-x, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 $4\sqrt{2}$ ，侧棱长为 $4\sqrt{5}$ ，点 S, A, B, C, D 都在同一个球的球面上，则该球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

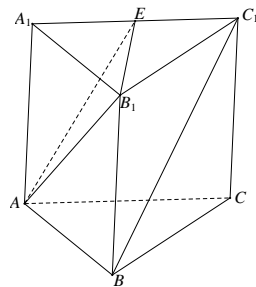
16. 法国数学家费马被称为业余数学之王，很多数学定理以他的名字命名. 对 $\triangle ABC$ 而言，若其内部的点 P 满足 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ ，则称 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 45^\circ$ ，设 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，且满足 $\angle PBA = 45^\circ$ ， $PA = 2$. 则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长均为 1，点 E 为棱 A_1C_1 的中点.

(1) 证明： $BC_1 \parallel$ 平面 AB_1E ；

(2) 求异面直线 BC_1 和 AC 所成角的余弦值.



18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c \cos A + a \cos C = \frac{b}{2 \cos B}$.

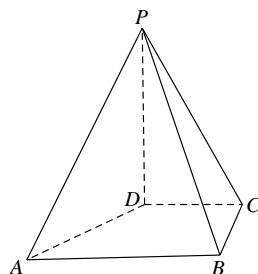
(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a + c = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b 的值.

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = DP = 2$, $DC = BC = 1$.

(1) 证明: $AD \perp PB$;

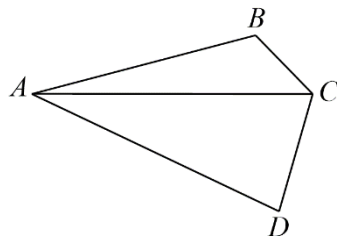
(2) 求直线 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值.



20. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \frac{2}{3}\pi$.

(1) 若 $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $CD = \sqrt{3}BC$, $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$, $\angle BCD = \frac{2\pi}{3}$, 记 $\angle BAC$ 为 θ , 求 θ 的值.



21. (12 分) 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC \perp CD$, E 为 BC 上一点, $AE \perp BC$, $AE = BE = 2CD = 2$, $CE = \sqrt{3}$, 将四边形 $AECD$ 沿 AE 折起, 使得二面角 $B-AE-C$ 的大小为 30° , 连接 BD , BC , 得到如图 2.

(1) 证明: 平面 $ABE \perp$ 平面 BCE ;

(2) 点 F 是线段 BE 上一点, 设 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{EB}$, 且二面角 $E-AD-F$ 为 30° , 求 λ 的值.

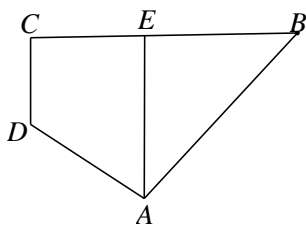


图 1

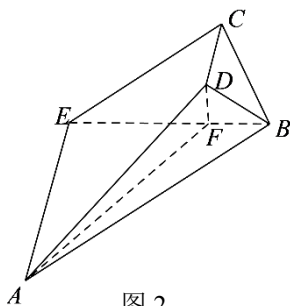


图 2

22. (12分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

(1) 求 $\frac{c}{a}$;

(2) 记 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 求 $\frac{2S}{b^2}$ 的最大值.

(命题、审题: 校命题小组)