高 2025 届 2022-2023 学年（下）5 月名校联考

数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1．复数 $z=\mathrm{i}(3+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点所在的象限为

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,\lambda)$．若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\lambda=$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．0　　C．$\frac{1}{2}$　　D．8

3．已知 $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 α 为第三象限角，则 $\tan\alpha=$

A．$-\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{2}$

4．金字塔一直被认为是古埃及的象征，然而，玛雅文明也有类似建筑，玛雅金字塔是仅次于埃及金字塔的著名建筑．玛雅金字塔由巨石堆成，其下方近似为正四棱台，顶端是祭神的神殿，其形状近似为正四棱柱．整座金字塔的高度为 $29\mathrm{m}$，金字塔的塔基（正四棱台的下底面）的周长为 $220\mathrm{m}$，塔台（正四棱台的上底面）的周长为 $52\mathrm{m}$，神殿底面边长为 $9\mathrm{m}$，高为 $6\mathrm{m}$，则该玛雅金字塔的体积为

A．$\frac{74920}{3}\mathrm{m}^3$　　B．$30455\mathrm{m}^3$

C．$37217\mathrm{m}^3$　　D．$45439.5\mathrm{m}^3$

5．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $a=x$，$c=6$，$A=60^\circ$，若满足条件的三角形有两个，则 x 的取值范围为

A．$\left(3\sqrt{3},6\right]$　　B．$\left(3\sqrt{3},6\right)$　　C．$(3,6)$　　D．$\left(3\sqrt{3},+\infty\right)$

6．已知一个正六棱锥的所有顶点都在一个球的表面上，六棱锥的底面边长为 1，侧棱长为 2，则球的表面积为

A．$\frac{4\pi}{3}$　　B．$\frac{8\pi}{3}$　　C．$\frac{16\pi}{3}$　　D．4π

7．若 $\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}\cos 2\theta=0$，则 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})+\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$

A．-2　　B．1　　C．2　　D．4

8．在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c．已知$B=\dfrac{\pi}{3}$，$a=8$，$b\cos A+a\cos B=6$，点O是$\triangle ABC$的外心．若$\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，则$x+y=$

A．$\dfrac{7}{12}$　　B．$\dfrac{23}{36}$　　C．$\dfrac{25}{36}$　　D．$\dfrac{29}{36}$

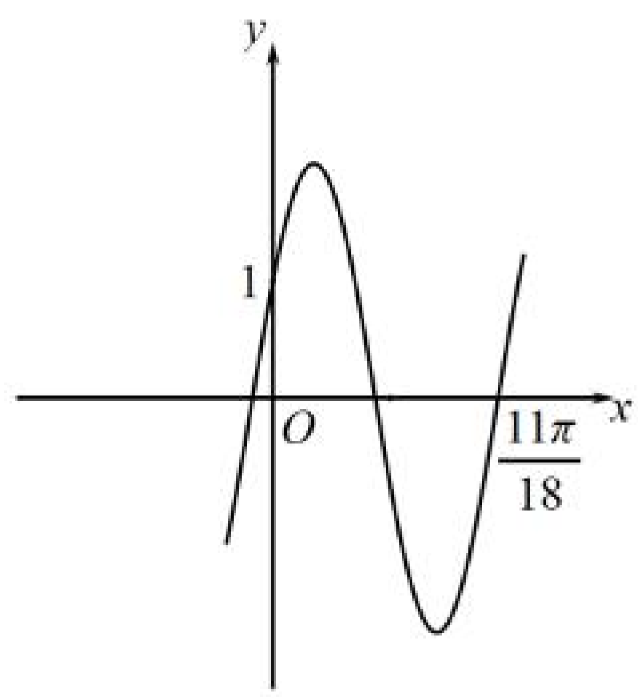
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．给出下列 4 个命题，其中正确的命题是

A．梯形可确定一个平面　　B．棱台侧棱的延长线不一定相交于一点

C．$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$　　D．若非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

10．函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则



A．函数$f(x)$的最小正周期为$\dfrac{2\pi}{3}$

B．$f(x)$在区间$(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3})$上单调递减

C．$y=f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{9}$对称

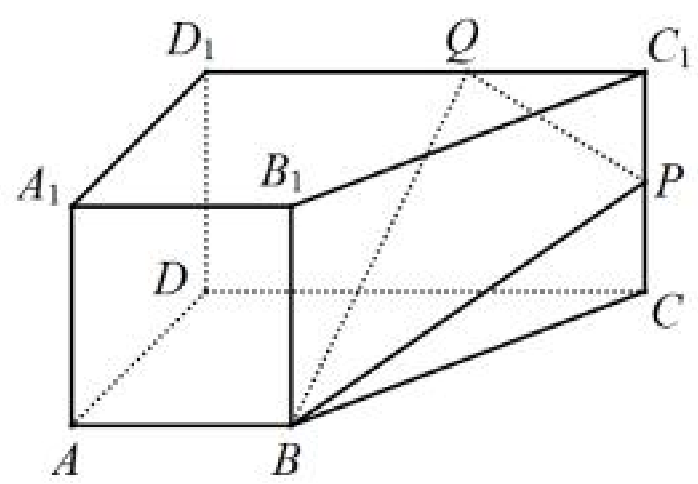
D．将$f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度可得$y=2\cos(3x+\dfrac{\pi}{6})$的图象

11．已知O为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,\ \sin\beta)$，$P_3(\cos\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\ \sin\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta))$，$A(1,\ 0)$，则

A．$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_3}|$　　B．$|\overrightarrow{P_1P_3}|=|\overrightarrow{P_2P_3}|$

C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　D．$(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})\cdot\overrightarrow{OP_3}\le 2$

12．如图，直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面是梯形，$AB\parallel CD$，$AD\perp DC$，$BC=CD=4$，$DD_1=AB=2$，P是棱CC_1的中点．Q是棱C_1D_1上一动点（不包含端点），则



A．AC与平面BPQ有可能平行

B．B_1D_1与平面BPQ有可能平行

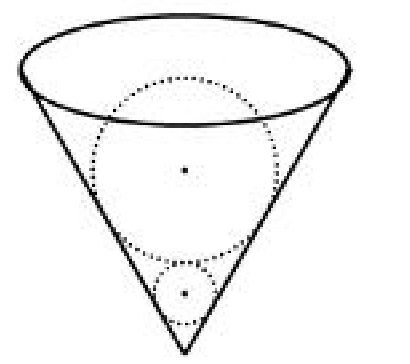
C．三角形BPQ周长的最小值为$\sqrt{17}+\sqrt{29}$

D．三棱锥$A-BPQ$的体积为定值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若复数z满足$z+\overline{z}+2(z-\overline{z})=2+4\mathrm{i}$，则$|z|=$__________．

14．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4$，且 $|\boldsymbol{b}|=4$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模为___________.



15．一个倒置的圆锥形容器，其轴截面为等边三角形，在其内放置两个球形物体，两球体均与圆锥形容器侧面相切，且两球形物体也相切，则小球的体积与大球的体积之比为___________.

16. 在锐角三角形中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $c=\sqrt{3}$，$\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}=3$，则 $a^2+b^2=$___________（填数值），$\triangle ABC$ 的面积的取值范围是___________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

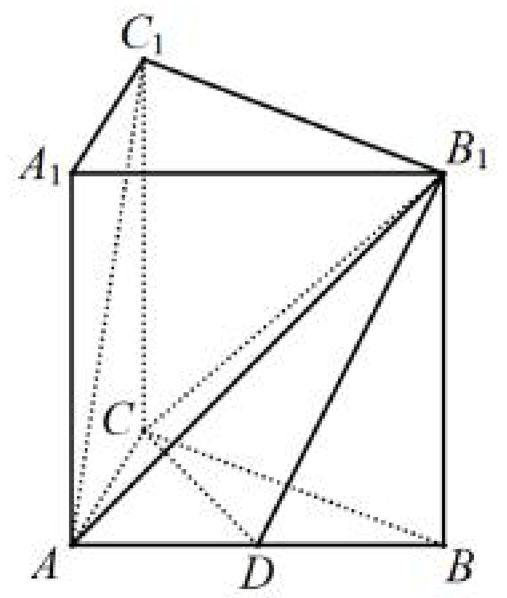
在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $\sin^2 A+\sin^2 C=\sin A\sin C+\sin^2 B$．

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18．（12 分）

如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为 2，D 为 AB 的中点.

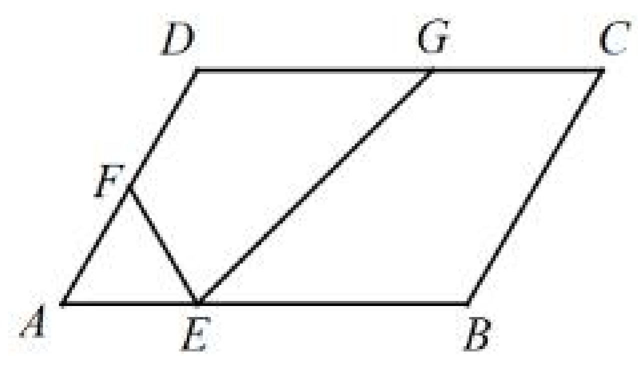


（1）求证：直线 AC_1 // 平面 B_1CD；

（2）求三棱锥 $A-B_1CD$ 的体积.

19．（12 分）

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，$\angle DAB=60^\circ$，点 E，F，G 分别在边 AB，AD，DC 上，且 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，$\overrightarrow{DG}=\lambda\overrightarrow{DC}\ (0\le\lambda\le 1)$.



（1）若 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{EG}$；

（2）求 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的取值范围.

20．（12 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x\,,2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4}+\omega x))$，$\boldsymbol{b}=(\cos\omega x+\sin\omega x\,,\sin(\frac{\pi}{4}-\omega x))$，设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\sqrt{3}$ $(\omega>0)$，且函数图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$．

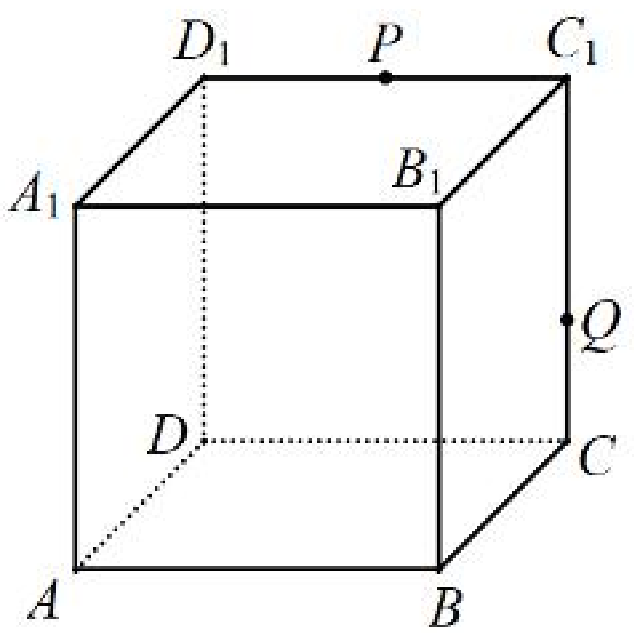
（1）求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域；

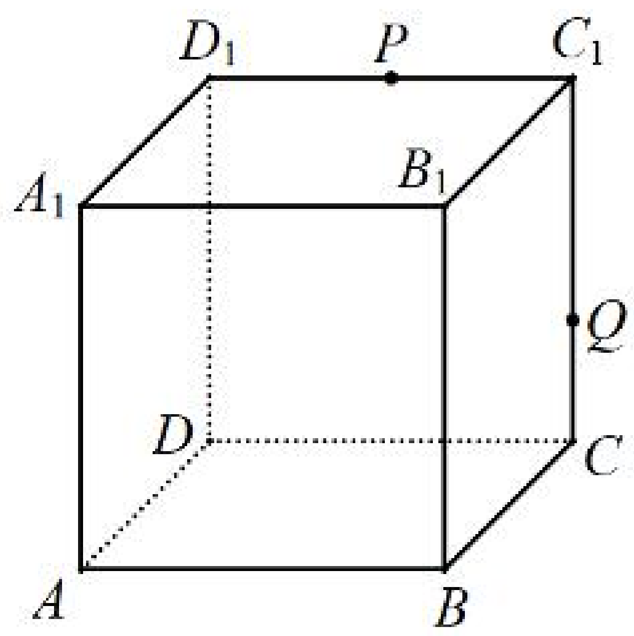
（2）设 $M=\left\{x\in\mathbf{R}\middle|f^2(x)-3\sqrt{2}f(x)+4\le 0\right\}$，$P=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|1\le x\le 5\right\}$，求 $M\cap P$．

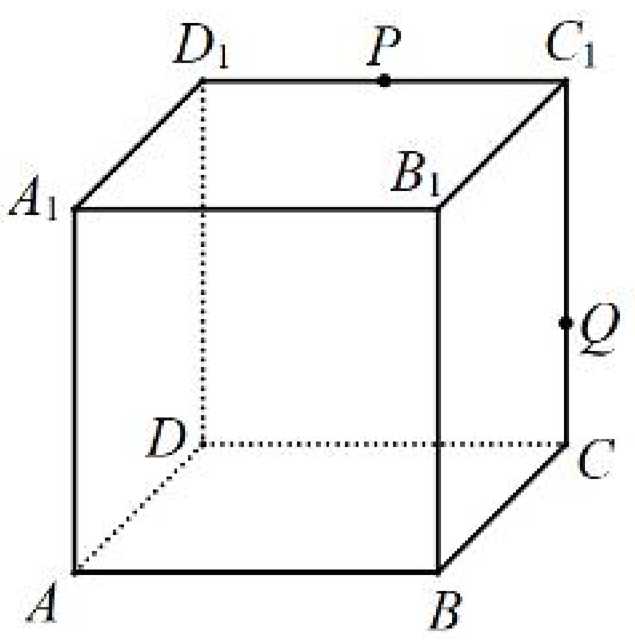
21．（12 分）

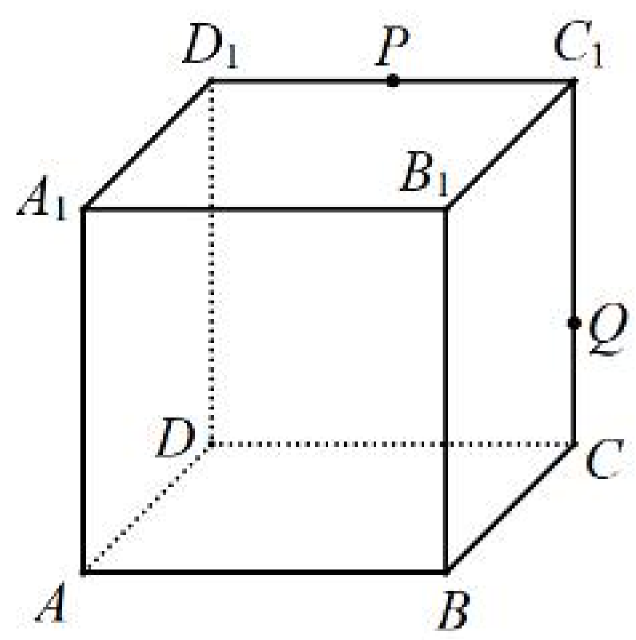
如图，在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 C_1D_1 的中点，Q 为 CC_1 的一个三等分点（靠近 C）．

（1）经过 P，Q 两点作平面 α，平面 α 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面可能是 n 边形，请根据 n 的不同取值分别作出截面图形（每种情况作一个代表类型，例如 $n=3$ 只需要画一种，下面给了四幅图，可以不用完，如果不够请自行增加)，保留作图痕迹；

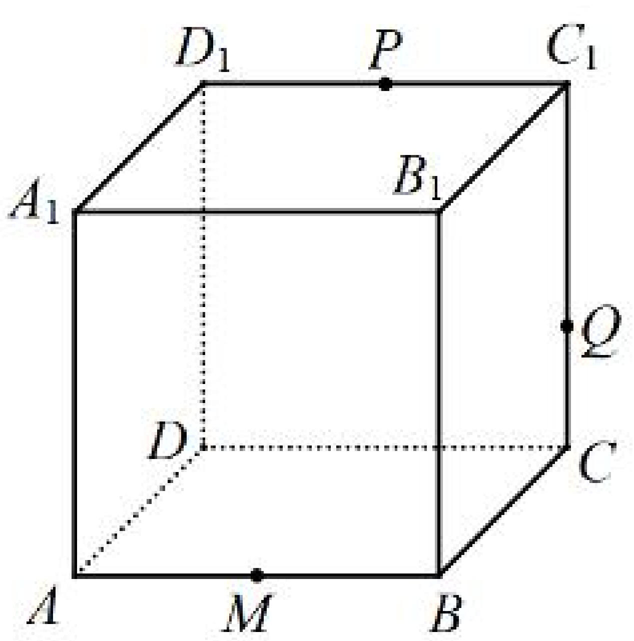








（2）若 M 为 AB 的中点，求过点 P，Q，M 的截面的面积．

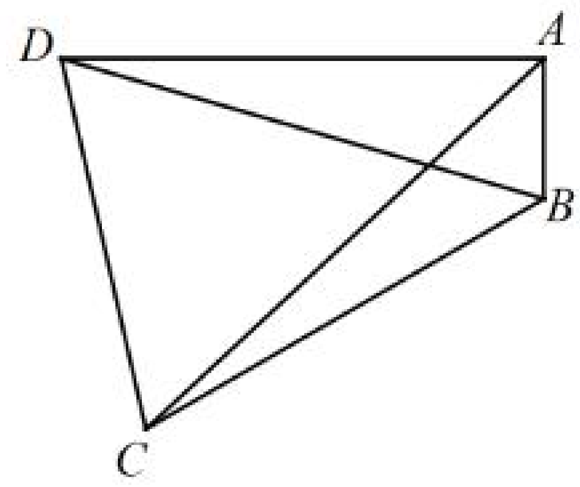


22．（12 分）

由于某地连晴高温，森林防灭火形势严峻，某部门安排了甲、乙两名森林防火护林员对该区域开展巡查．现甲、乙两名森林防火护林员同时从 A 地出发，乙沿着正西方向巡视走了 3km 后到达 D 点．甲向正南方向巡视若干公里后到达 B 点，又沿着南偏西 $60°$ 的方向巡视走到了 C 点，经过测量发现 $\angle ACD = 60°$．设 $\angle ACB = \theta$，如图所示．

（1）设甲护林员巡视走过的路程为 $S = AB + BC$，请用 θ 表示 S，并求 S 的最大值；

（2）为了强化应急应战准备工作，有关部门决定在 $\triangle BCD$ 区域范围内储备应急物资，求 $\triangle BCD$ 区域面积的最大值．



高 2025 届 2022-2023 学年（下）5 月名校联考

数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	D	B	B	C	C	B

【解析】

8．解：$\because b\cos A+a\cos B=6$，$\therefore b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=6$，$\therefore c^2=6c\Rightarrow c=6$．

由 $\vec{BO}=x\vec{BA}+y\vec{BC}$ 得，$\vec{BO}\cdot\vec{BA}=x\vec{BA}\cdot\vec{BA}+y\vec{BC}\cdot\vec{BA}$，$\vec{BO}\cdot\vec{BC}=x\vec{BA}\cdot\vec{BC}+y\vec{BC}\cdot\vec{BC}$，

即：$18=36x+24y$，$32=24x+64y$，解得 $x=\dfrac{2}{9}$，$y=\dfrac{5}{12}$，$\therefore x+y=\dfrac{23}{36}$，故选 B.

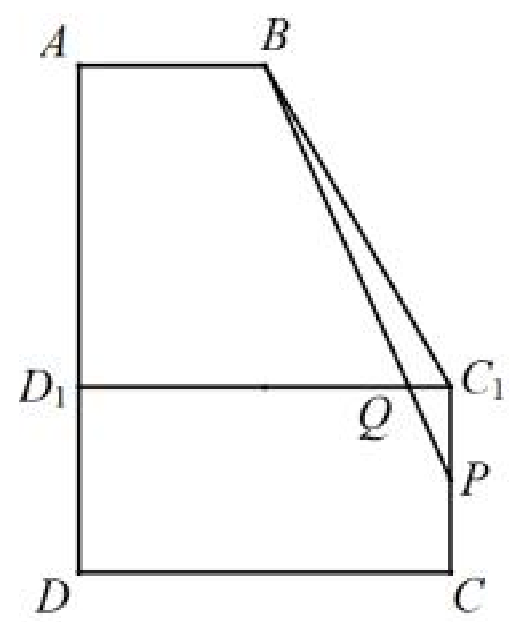
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
AC	ACD	ABD	ACD

【解析】

12．解：对于 A，当 Q 为 C_1D_1 的中点时，AC_1 // 平面 BPQ，故 A 正确；

对于 B，B_1D_1 // BD，又 $D\notin$ 平面 BPQ，BD 与平面 BPQ 只能相交，所以 B_1D_1 与平面 BPQ 只能相交，故 B 错；



对于 C，$BP=\sqrt{17}$，把 ABC_1D_1 沿 C_1D_1 展开与 CDD_1C_1 在同一平面（如图），则当 B，P，Q 共线时，$BQ+PQ$ 有最小值，由 $AD_1=4$ 可得 $BP=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$，所以三角形 BPQ 周长的最小值为 $\sqrt{17}+\sqrt{29}$，故 C 正确；

对于 D，$V_{A-BPQ}=V_{Q-ABP}$，因 $S_{\triangle ABP}$ 为定值，又 C_1D_1 // 平面 ABP，故 Q 到平面 ABP 的距离也为定值，所以 V_{A-BPQ} 为定值.故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13	14	15	16
$\sqrt{2}$	1	$\dfrac{1}{27}$	5 ，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{21}}{4}\right]$

【解析】

16. 解：由题知，$\tan C(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B})=3\Rightarrow\frac{\sin C}{\cos C}(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B})=3\Rightarrow\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\sin C}{\sin A\cdot\sin B}=3$.

即：$\frac{\sin^2 C}{\sin A\cdot\sin B}\cdot\frac{1}{\cos C}=3$，$\therefore\frac{c^2}{ab}\times\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=3$，又 $c=\sqrt{3}\therefore a^2+b^2=5$.

又$\because\triangle ABC$ 是锐角三角形，$\therefore\cos A>0$，$\cos B>0$，$\cos C>0$，

即 $a^2-b^2+3>0$，$b^2-a^2+3>0$，$a^2+b^2-3>0$，结合 $a^2+b^2=5$ 得 $b^2\in(1,4)$.

又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C,\therefore S_{\Delta ABC}^2=\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C,\therefore S_{\Delta ABC}^2=\frac{a^2b^2-1}{4}=\frac{b^2(5-b^2)-1}{4}$.

不妨设 $t=b^2\in(1,4)$, 则 $S_{\Delta ABC}^2=-\frac{1}{4}(t-\frac{5}{2})^2+\frac{21}{16},\therefore S_{\Delta ABC}^2\in\left(\frac{3}{4},\frac{21}{16}\right]\therefore S_{\Delta ABC}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{21}}{4}\right]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（1）由正弦定理知，$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$，即 $(\frac{a}{2R})^2+(\frac{c}{2R})^2=\frac{a}{2R}\cdot\frac{c}{2R}+(\frac{b}{2R})^2$，

$\therefore a^2+c^2=ac+b^2$ .... 2 分

$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$ .... 3 分

又$\because B\in(0,\pi)\therefore B=\frac{\pi}{3}$ .... 5 分

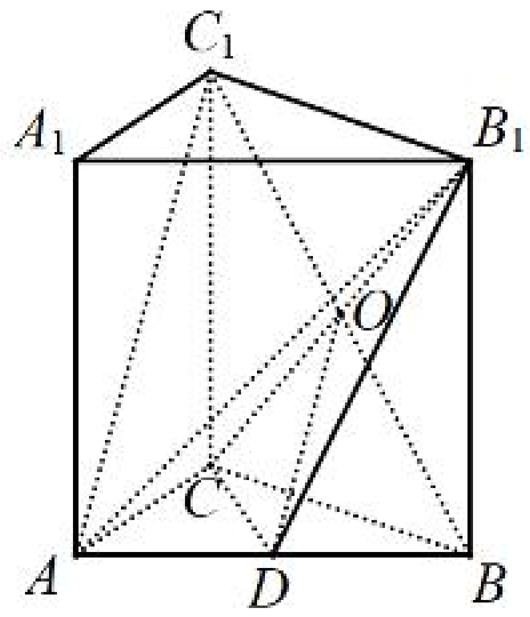
（2）$\because b=\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$\therefore a^2+c^2=3+ac$ .... 6 分

又$\because S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore ac=2$ .... 7 分

$\therefore(a+c)^2=3+3ac=9\ \therefore a+c=3$ .... 9 分

故$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3+\sqrt{3}$ .... 10 分

18. 解：（1）连接 BC_1 交 B_1C 于点 O，连接 OD .... 1 分



由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得 O 为 BC_1 的中点，

又 D 为 AB 的中点，所以，$AC_1\parallel OD$， .... 4 分

又 $AC_1\not\subset$ 平面B_1CD，$OD\subset$ 平面B_1CD，$\therefore AC_1\parallel$ 平面B_1CD .... 6 分

（2）$\because$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为 2，

$\therefore CD\perp AB$ 且 $CD=\sqrt{3}$，$S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 8 分

$\therefore V_{A-B_1CD}=V_{B_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot B_1B=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ .... 12 分

19．解：（1）$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ .... 3 分

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ .... 6 分

（2）$\because \overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}=(\lambda-\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ .... 7 分

又 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ .... 8 分

$\therefore \overrightarrow{EG}\bullet\overrightarrow{EF}=\left[(\lambda-\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right]\cdot(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ .... 9 分

$=(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\lambda)\times 3^2+\frac{1}{2}\times 2^2+(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})\times 3\times 2\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\lambda+\frac{3}{2}$ .... 10 分

又 $\because \lambda\in[0,1]$ $\therefore \overrightarrow{EG}\bullet\overrightarrow{EF}\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$.. 12 分

20．解：（1）$f(x)=(\cos\omega x-\sin\omega x)(\cos\omega x+\sin\omega x)+2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4}+\omega x)\sin(\frac{\pi}{4}-\omega x)-\sqrt{3}$

$=\cos^2\omega x-\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\cos^2(\frac{\pi}{4}+\omega x)-\sqrt{3}$

$=\cos 2\omega x+\sqrt{3}\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\omega x\right)\right]=\cos 2\omega x-\sqrt{3}\sin 2\omega x=2\cos(2\omega x+\frac{\pi}{3})$ .... 3 分

由题知，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$ $\therefore \omega=1$ .... 4 分

$\therefore f(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\mathbf{R}$

故 $f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$.. 6 分

（2）$\because \left[f(x)-\sqrt{2}\right]\left[f(x)-2\sqrt{2}\right]\le 0$ $\therefore \sqrt{2}\le f(x)\le 2\sqrt{2}$ .... 7 分

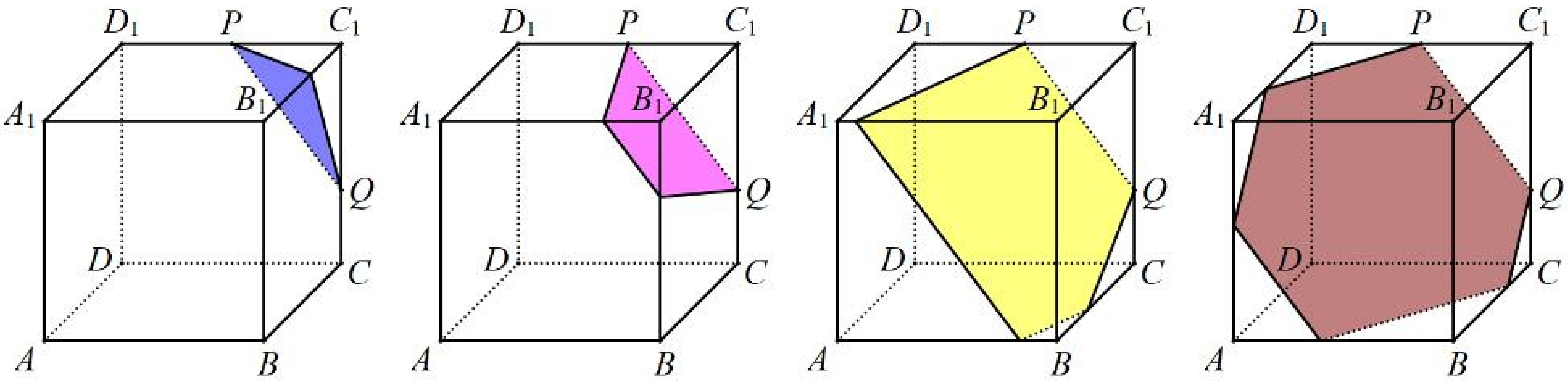
即 $\sqrt{2}\le 2\cos(2x+\frac{\pi}{3})\le 2\sqrt{2}$ $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos(2x+\frac{\pi}{3})\le\sqrt{2}$

结合余弦曲线知，$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$， .... 9 分

$\therefore -\frac{7\pi}{24}+k\pi\le x\le-\frac{\pi}{24}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ $\therefore M=\left[-\frac{7\pi}{24}+k\pi,-\frac{\pi}{24}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$ .... 10 分

又 $P=\{x\in\mathbf{Z}|1\le x\le 5\}$ $\therefore M\cap P=\{3\}$. .... 12 分

21．（1）截面可以分别为三角形，四边形，五边形，六边形



（本小题作出三角形、四边形各得 1 分，五边形、六边形各得 2 分，共 6 分.）

（2）如图：连接 PQ 所在直线交 DC 延长线于 X，交 DD_1 的延长线于 Z；

连接直线 MX 交 BC 于 R，交 DA 延长线于 Y；

连接 YZ 分别交 AA_1, A_1D_1 于 S, T .则六边形 $PQRMST$ 即为截面. .... 8 分

$\because P$ 为 $C_{1.}D_1$ 的中点，Q 为 CC_1 的一个三等分点（靠近 C），$\therefore D_1P = PC_1 = 3$，$C_1Q = 4, QC = 2$，

可得 $D_1Z = 4, PZ = PQ = 5$，$CX = \dfrac{3}{2}$，$QX = \dfrac{5}{2}$，

又 $CD // AB$，$\dfrac{CR}{RB} = \dfrac{XR}{RM} = \dfrac{CX}{MB} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{2}$，所以 $CR = 2$，$RB = 4\ XR = \dfrac{5}{2}$，$RM = 5$，

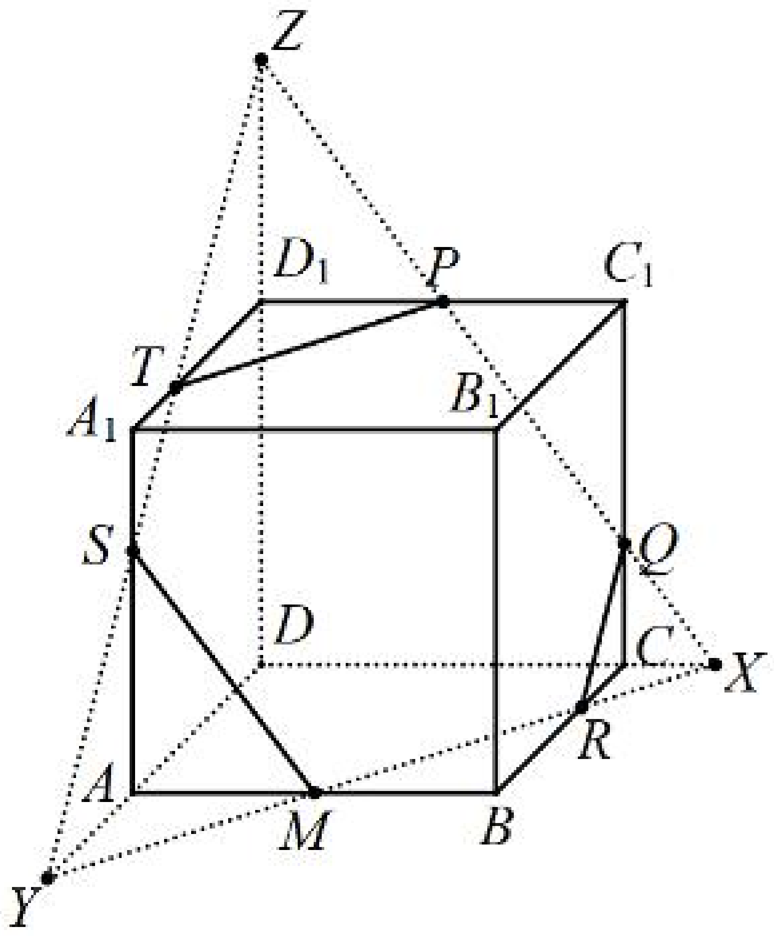
又 $AD // BC$，M 为 AB 的中点，$MY = 5$，$AY = 4$，所以 YDZ 为等腰直角三角形，

所以 $YS = 4\sqrt{2}$，$ST = 2\sqrt{2}$，$TZ = 4\sqrt{2}$，$YZ = 10\sqrt{2}$，$XY = XZ = \dfrac{25}{2}$，

$\therefore \triangle XYZ$ 为等腰三角形，等边上的高为 $\dfrac{5}{2}\sqrt{17}$，$S_{\triangle XYZ} = \dfrac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times \dfrac{5}{2}\sqrt{17} = \dfrac{25}{2}\sqrt{34}$

$S_{\triangle XQR} = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$，$S_{\triangle PZT} = S_{\triangle MSY} = 2\sqrt{34}$

所以 $S_{PQRMST} = S_{\triangle XYZ} - S_{\triangle XQR} - S_{\triangle PTZ} - S_{\triangle MSY} = \dfrac{25}{2}\sqrt{34} - \dfrac{\sqrt{34}}{2} - 2\sqrt{34} - 2\sqrt{34} = 8\sqrt{34}$ .... 12 分



方法二：可证明 $PQRM$ 与 $PTSM$ 是全等的等腰梯形，$PM = 6\sqrt{2}$，$QR = 2\sqrt{2}$，$PQ = RM = 5$，所以等腰梯

形 $PQRM$ 的高为 $\sqrt{17}$，所以 $S_{PQRMST}=2S_{PQRM}=2\times\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\sqrt{17}=8\sqrt{34}$.

22.（1）由题：$\angle ADC=360^0-(120^0+90^0+60^0+\theta)=90^0-\theta.$

在 ΔABC 中，由正弦定理：$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$ 即：$AC=2\sqrt{3}\cos\theta,$ .... 1 分

在 ΔABC 中，$\because\angle ACB=\theta,\therefore\angle CAB=60^0-\theta.$ 由正弦定理：$\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BC}{\sin(60^0-\theta)}=\frac{AC}{\sin 120^0}=4\cos\theta,$

$AB=4\cos\theta\sin\theta=2\sin 2\theta, BC=4\cos\theta\sin(60^0-\theta).$ .... 3 分

$\therefore S=AB+BC=2\sin 2\theta+4\cos\theta\sin(60^0-\theta)$ 且 $\theta\in(0,60^0)$

又 $S=\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}=2\sin(2\theta+60^0)+\sqrt{3}$ .... 5 分

$\because\theta\in(0,60^0),\therefore 2\theta+60^0\in(0,180^0),\therefore S$ 的最大值为 $2+\sqrt{3}$, 当且仅当 $\theta=15^0$ 时取得等号. .... 6 分

（2）由（1）知：$BC=4\cos\theta\sin(60^0-\theta), CD=2\sqrt{3}\sin(\theta+30^0).$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 4\cos\theta\sin(60^0-\theta)\cdot 2\sqrt{3}\sin(\theta+30^0)\cdot\sin(60^0+\theta)$ .... 7 分

$\therefore S=\sqrt{3}\sin(2\theta+60^0)\left[\sin(2\theta+60^0)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ .... 10 分

不妨设 $t=\sin(2\theta+60^0)$ 又 $\because\theta\in(0,60^0)\therefore 2\theta+60^0\in(60^0,180^0), t\in(0,1].$

$\therefore S=\sqrt{3}t^2+\frac{3}{2}t$ 而 S 在 $t\in(0,1]$ 上单调递增，$S_{\max=}S(1)=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$，当且仅当 $\theta=15^0$ 时取得等号............. 12 分