



## 2023 年普通高等学校招生全国统一考试

### 高三第三次联合诊断检测 数学参考答案

#### 一、单选题

1~8 CBDB ACCC

第 8 题提示：圆内接  $n$  边形为正  $n$  边形时面积最大，要使棱柱体积最大，可知上下底面为正  $n$  边形，由正  $n$  边形与外接圆的面积比不依赖于圆的半径，故只需考虑球体内接圆柱体积最大时，上下底面间的距离，

设圆柱底面圆的半径为  $r$ ，则球心到圆柱底面圆的距离为  $\sqrt{1-r^2}$ ，圆柱体积为  $2\pi r^2 \sqrt{1-r^2}$ ，考

虑函数  $f(x) = x\sqrt{1-x}$ ， $f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ ，可知  $r^2 = x = \frac{2}{3}$  时体积最大.

#### 二、多选题

9. ACD      10. ACD      11. BCD      12. ABD

第 12 题提示：令  $y=1$ ，得  $2(x+1)f(x) = xf(x+1)$ ，令  $x=0$ ，得  $f(0)=0$ ，令  $x=1$ ，得  $f(2)=4f(1)=8$

显然  $f(x) = x \cdot 2^x$  是一个满足条件的函数，故 C 错误

由  $\frac{f(x+1)}{x+1} = 2 \cdot \frac{f(x)}{x}$ ，记  $a_n = \frac{f(n)}{n}$ ，可知  $a_{n+1} = 2a_n$ ， $\{a_n\}$  为等比数列

$a_n = 2^n$ ， $f(n) = n \cdot 2^n$ ， $\therefore \sum_{k=1}^n f(k) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

#### 三、填空题

13. 0.728      14.  $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$       15.  $\sqrt{2}$       16.  $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$

第 16 题提示：设  $PF_1 = n, PF_2 = m, \angle PF_2F_1 = \alpha$ ，

由正弦定理  $\frac{m}{\sin 3\alpha} = \frac{n}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin 4\alpha} = \frac{m+n}{\sin 3\alpha + \sin \alpha} = \frac{2a}{\sin 3\alpha + \sin \alpha}$

$\therefore e = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 3\alpha + \sin \alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{4 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha}$

由  $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ ， $\cos \alpha \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，可得  $e \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$

#### 四、解答题

17. (10 分)

解：(1)  $\because S_{n+1} = 2S_n + 1$ ， $\therefore S_n = 2S_{n-1} + 1 (n \geq 2)$

两式相减得  $a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$ ，即数列  $\{a_n\}$  从第二项开始为等比数列

令  $n=1$ ， $\therefore S_2 = a_1 + a_2 = 2a_1 + 1$ ， $a_2 = 2$



$\therefore a_2 = 2a_1$ ,  $\therefore$  数列  $\{a_n\}$  为等比数列,  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2^{n-1}$  .....5 分

(2)  $b_n = 2^{n-1} \cdot 2^n + \log_2(2^{n-1} \cdot 2^n) = \frac{1}{2} \cdot 4^n + 2n - 1$ , 设  $T_n$  为  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}(4 + 4^2 + \cdots + 4^n) + (1 + 3 + \cdots + 2n - 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4(1 - 4^n)}{1 - 4} + n^2 = \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{2}{3} + n^2 \quad \text{.....10 分} \end{aligned}$$

18. (12 分)

解: (1) 由题  $\sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C = \sin A \sin B \cos C$

由正弦定理,  $ac \cos B - bc \cos A = ab \cos C$

$$\text{由余弦定理, } ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{化简整理得 } a^2 + c^2 = 3b^2, \quad \frac{a^2 + c^2}{b^2} = 3 \quad \text{.....6 分}$$

$$(2) \text{ 由题 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2}{3}$$

联立  $a^2 + c^2 = 3b^2$  得  $a^2 + c^2 - 2ac = 0$ ,  $\therefore a = c$ ,  $\triangle ABC$  为等腰三角形

$$\therefore \sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{由 } \cos B = 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 = \frac{2}{3}, \text{ 解得 } \sin A = \cos \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6} \quad \text{.....12 分}$$

19. (12 分)

解: (1) 设  $\triangle BDC$  的外心为  $P$ ,  $\because$  球心  $O$  到底面的距离为 1,  $\therefore OP = 1$

$\because \triangle BCD$  是边长为  $\sqrt{3}$  等边三角形,  $\therefore BP = 1$

$$\therefore OB = \sqrt{OP^2 + BP^2} = \sqrt{2}, \text{ 球 } O \text{ 的表面积为 } 4\pi OB^2 = 8\pi \quad \text{.....6 分}$$

(2) 以  $DC$  中点  $M$  为原点,  $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{PO}$  分别为  $x, y, z$  轴正向建立空间直角坐标系

$$\therefore B\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right), C(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), D(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), O\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), A\left(-\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -2\right), \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \overrightarrow{DC} = (0, \sqrt{3}, 0)$$

$$\text{设平面 } ABC \text{ 的法向量为 } \vec{n}, \text{ 由 } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \text{ 解得 } \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 1)$$



设平面  $ABC$  的法向量为  $\vec{m}$ ，由  $\begin{cases} \vec{AC} \cdot \vec{m} = 0 \\ \vec{DC} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$ ，令  $z = 1$ ，解得  $\vec{m} = (4, 0, 1)$

设二面角  $B-AC-D$  的平面角为  $\theta$ ， $\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{85}}{17}$  .....12 分

20. (12 分)

解：(1) 设甲一局的得分为  $\xi_1$ ，由题得

$$P(\xi_1 = 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(\xi_1 = 3) = \frac{1}{3}, \quad P(\xi_1 = 0) = 1 - P(\xi_1 = 1) - P(\xi_1 = 3) = \frac{1}{3}$$

设乙一局的得分为  $\xi_2$ ，由题得

$$P(\xi_2 = 1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}, \quad P(\xi_2 = 3) = \frac{1}{4}, \quad P(\xi_2 = 0) = 1 - P(\xi_2 = 1) - P(\xi_2 = 3) = \frac{23}{60}$$

若最后一轮甲反败为胜，其概率为  $P = P(X = 3, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{23}{60} + \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{30} = \frac{1}{4}$$
 .....6 分

(2) 列出  $X, Y$  和  $|X - Y|$  取值相应的概率表如下：

$P \backslash X \backslash Y$	3	1	0
3	$P( X-Y =0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$P( X-Y =2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$P( X-Y =3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
1	$P( X-Y =2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{30} = \frac{11}{90}$	$P( X-Y =0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{30} = \frac{11}{90}$	$P( X-Y =1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{30} = \frac{11}{90}$
0	$P( X-Y =3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{23}{60} = \frac{23}{180}$	$P( X-Y =1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{23}{60} = \frac{23}{180}$	$P( X-Y =0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{23}{60} = \frac{23}{180}$

由此可得  $Z = |X - Y|$  的分布列

$Z =  X - Y $	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{37}{180}$	$\frac{19}{90}$

$$\therefore E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{37}{180} + 3 \cdot \frac{19}{90} = \frac{233}{180}$$
 .....12 分

21. (12 分)

解：(1)  $\because \triangle ABD$  是面积为  $\sqrt{3}$  的正三角形， $\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b = \sqrt{3} \\ a = \sqrt{3}b \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{3}, b = 1$ ,



∴椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  .....4 分

(2) 设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), P'(x_1, -y_1), Q'(x_2, -y_2)$ , ∴  $l_{PQ}: y = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2$

由对称性知  $K$  在  $x$  轴上, 令  $y = 0$ , 解得  $x_K = \frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{y_1 + y_2}$

设直线  $l_{PQ}: x = ty + m$ , 联立椭圆得  $(t^2 + 3)y^2 + 2tmy + m^2 - 3 = 0$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{-2tm}{t^2 + 3}, \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{m^2 - 3}{t^2 + 3} \quad (*)$$

$$x_K = \frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{y_1(ty_2 + m) + (ty_1 + m)y_2}{y_1 + y_2} = \frac{2ty_1 y_2}{y_1 + y_2} + m$$

代入 (\*) 得  $x_K = \frac{3}{m}$

∵  $\angle AKB$  为钝角, ∴  $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BK} < 0$ , 即  $(\frac{3}{m}, -1) \cdot (\frac{3}{m}, 1) = \frac{9}{m^2} - 1 < 0$

解得  $m \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$  .....12 分

22. (12 分)

解: (1) 曲线  $y = f(x) - g(x) = k^x - k \ln x$ ,  $y' = k^x \ln k - \frac{k}{x}$ , 当  $x = 1$  时,  $y' = k \ln k - k$ ,  $y = k$ ,

故切线方程为  $y - k = (k \ln k - k)(x - 1)$ , 整理有  $(k \ln k - k)x - y - k \ln k + 2k = 0$  .....4 分

(2) 解法一: 先设  $F(x) = h(x) - g(x) = kx - 1 - k \ln x$ ,  $F'(x) = k - \frac{k}{x} = \frac{k(x-1)}{x}$ , 当  $x > 1$  时  $F'(x) > 0$ ,

当  $0 < x < 1$  时  $F'(x) < 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $F(1) = k - 1 \geq 0$ ,

故  $k > 1$ 。

令  $H(x) = f(x) - h(x) = k^x - kx + 1$ ,  $H'(x) = k^x \ln k - k$ , 易知  $H'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

令  $k^{x_0} \ln k - k = 0$ , 有  $x_0 = \log_k \frac{k}{\ln k}$ , 有  $H(x_0) = \frac{k}{\ln k} - k \log_k \frac{k}{\ln k} + 1 \geq 0$ , 再令  $\ln k = t$ ,

$H(x_0) = \frac{e^t}{t} - e^t(1 - \frac{\ln t}{t}) + 1 \geq 0$ , 等价整理为  $\ln t + 1 + \frac{t}{e^t} - t \geq 0$ , 令  $M(t) = \ln t + 1 + \frac{t}{e^t} - t$ ,

$M'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1-t}{e^t} - 1 = (1-t)(\frac{1}{t} + \frac{1}{e^t})$ , 当  $t > 1$  时  $M'(t) < 0$ ,

当  $0 < t < 1$  时  $M'(t) > 0$ , 所以  $M(t)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

$$M(\frac{1}{3}) = \ln \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{e}} = -\ln 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{e}} < -\ln 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} < -1 + 1 = 0$$



$M(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{e}} = \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{e}} > \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \ln 2$ ，而  $\ln e^3 - \ln 2^4 > 0$ ，所以

$M(\frac{1}{2}) > 0$ ，故  $M(t)$  在  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  内存在唯一零点  $t_0$ ，有  $\ln k > t_0$ ， $k > e^{t_0}$ ， $e^{t_0} \in (\sqrt[3]{e}, \sqrt{e})$ ， $e^{t_0} < 2$ ，故  $k \geq 2$ ，所以符合条件的  $k$  的最小整数值为 2 .....12 分

解法二：先设  $F(x) = h(x) - g(x) = kx - 1 - k \ln x$ ， $F'(x) = k - \frac{k}{x} = \frac{k(x-1)}{x}$ ，当  $x > 1$  时  $F'(x) > 0$ ，

当  $0 < x < 1$  时  $F'(x) < 0$ ，所以  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减，在  $(1, +\infty)$  上单调递增，所以  $F(1) = k - 1 \geq 0$ ，故  $k > 1$ 。

令  $k = 2$ ，有  $H(x) = f(x) - h(x) = 2^x - 2x + 1$ ， $H'(x) = 2^x \ln 2 - 2$ ，易知  $H'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，

令  $2^{x_0} \ln 2 - 2 = 0$ ，有  $x_0 = \log_2 \frac{2}{\ln 2}$ ，

有  $H(x_0) = \frac{2}{\ln 2} - 2 \log_2 \frac{2}{\ln 2} + 1 = \frac{2 - \ln 2 + \ln(\ln 2)^2}{\ln 2} = \frac{2 - \ln \frac{2}{(\ln 2)^2}}{\ln 2}$ ，

由  $e^2 < 2^3$ ， $\ln 2 > \frac{2}{3}$ ，故  $\ln \frac{2}{(\ln 2)^2} < \ln \frac{9}{2}$ ， $2 - \ln \frac{2}{(\ln 2)^2} > 2 - \ln \frac{9}{2} = \ln \frac{2e^2}{9} > 0$ ，所以  $H(x) > 0$ ，

故符合条件的  $k$  的最小整数值为 2 .....12 分