高 2025 届 2022-2023 学年（下）5 月名校联考

数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	D	B	B	C	C	B

【解析】

8．解：$\because b\cos A+a\cos B=6$，$\therefore b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=6$，$\therefore c^2=6c\Rightarrow c=6$．

由 $\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$ 得，$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$，

即：$18=36x+24y$，$32=24x+64y$，解得 $x=\dfrac{2}{9}$，$y=\dfrac{5}{12}$，$\therefore x+y=\dfrac{23}{36}$，故选 B.

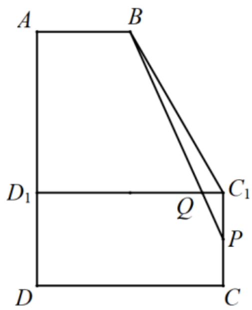
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
AC	ACD	ABD	ACD

【解析】

12．解：对于 A，当 Q 为 C_1D_1 的中点时，AC_1 // 平面 BPQ，故 A 正确；

对于 B，B_1D_1 // BD，又 $D\notin$ 平面 BPQ，BD 与平面 BPQ 只能相交，所以 B_1D_1 与平面 BPQ 只能相交，故 B 错；



对于 C，$BP=\sqrt{17}$，把 ABC_1D_1 沿 C_1D_1 展开与 CDD_1C_1 在同一平面（如图），则当 B，P，Q 共线时，$BQ+PQ$ 有最小值，由 $AD_1=4$ 可得 $BP=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$，所以三角形 BPQ 周长的最小值为 $\sqrt{17}+\sqrt{29}$，故 C 正确；

对于 D，$V_{A-BPQ}=V_{Q-ABP}$，因 $S_{\triangle ABP}$ 为定值，又 C_1D_1 // 平面 ABP，故 Q 到平面 ABP 的距离也为定值，所以 V_{A-BPQ} 为定值.故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13	14	15	16
$\sqrt{2}$	1	$\dfrac{1}{27}$	5 ，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{21}}{4}\right]$

【解析】

16．解：由题知，$\tan C(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B})=3\Rightarrow\frac{\sin C}{\cos C}(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B})=3\Rightarrow\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\sin C}{\sin A\cdot\sin B}=3$．

即：$\frac{\sin^2 C}{\sin A\cdot\sin B}\cdot\frac{1}{\cos C}=3$，$\therefore\frac{c^2}{ab}\times\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=3$，又 $c=\sqrt{3}\therefore a^2+b^2=5$．

又$\because\triangle ABC$是锐角三角形，$\therefore\cos A>0$，$\cos B>0$，$\cos C>0$，

即 $a^2-b^2+3>0$，$b^2-a^2+3>0$，$a^2+b^2-3>0$，结合 $a^2+b^2=5$ 得 $b^2\in(1,4)$．

又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C,\therefore S_{\Delta ABC}^2=\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C,\therefore S_{\Delta ABC}^2=\frac{a^2b^2-1}{4}=\frac{b^2(5-b^2)-1}{4}$．

不妨设 $t=b^2\in(1,4)$, 则 $S_{\Delta ABC}^2=-\frac{1}{4}(t-\frac{5}{2})^2+\frac{21}{16},\therefore S_{\Delta ABC}^2\in\left(\frac{3}{4},\frac{21}{16}\right]\therefore S_{\Delta ABC}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{21}}{4}\right]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．解：（1）由正弦定理知，$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$，即 $(\frac{a}{2R})^2+(\frac{c}{2R})^2=\frac{a}{2R}\cdot\frac{c}{2R}+(\frac{b}{2R})^2$，

$\therefore a^2+c^2=ac+b^2$ .... 2 分

$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$ .... 3 分

又$\because B\in(0,\pi)\therefore B=\frac{\pi}{3}$ .... 5 分

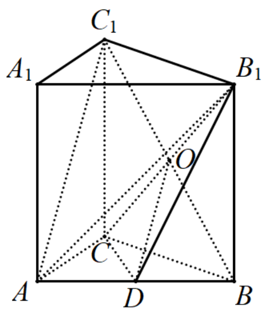
（2）$\because b=\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$\therefore a^2+c^2=3+ac$ .... 6 分

又$\because S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{2}\therefore ac=2$ .... 7 分

$\therefore(a+c)^2=3+3ac=9\therefore a+c=3$ .... 9 分

故$\triangle ABC$的周长为 $a+b+c=3+\sqrt{3}$ .... 10 分

18．解：（1）连接 BC_1 交 B_1C 于点 O，连接 OD .... 1 分



由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得 O 为 BC_1 的中点，

又 D 为 AB 的中点，所以，$AC_1\,//\,OD$， .... 4 分

又 $AC_1\not\subset$ 平面B_1CD，$OD\subset$ 平面B_1CD，$\therefore AC_1\,//$ 平面B_1CD .... 6 分

（2）$\because$正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为 2，

$\therefore CD\perp AB$ 且 $CD=\sqrt{3}$，$S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 8 分

$\therefore V_{A-B_1CD}=V_{B_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot B_1B=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ .... 12 分

19．解：（1）$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ .... 3 分

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ .... 6 分

（2）$\because\ \overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}=(\lambda-\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ .... 7 分

又 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ .... 8 分

$\therefore\overrightarrow{EG}\bullet\overrightarrow{EF}=\left[(\lambda-\frac{1}{3})\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right]\cdot(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ .... 9 分

$=(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\lambda)\times3^2+\frac{1}{2}\times2^2+(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})\times3\times2\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\lambda+\frac{3}{2}$ .... 10 分

又$\because\ \lambda\in[0,1]\ \therefore\ \overrightarrow{EG}\bullet\overrightarrow{EF}\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$. .... 12 分

20．解：（1）$f(x)=(\cos\omega x-\sin\omega x)(\cos\omega x+\sin\omega x)+2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4}+\omega x)\sin(\frac{\pi}{4}-\omega x)-\sqrt{3}$

$=\cos^2\omega x-\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\cos^2(\frac{\pi}{4}+\omega x)-\sqrt{3}$

$=\cos2\omega x+\sqrt{3}\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\omega x\right)\right]=\cos2\omega x-\sqrt{3}\sin2\omega x=2\cos(2\omega x+\frac{\pi}{3})$ .... 3 分

由题知，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi\ \therefore\omega=1$ .... 4 分

$\therefore\ f(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\mathbf{R}$

故 $f(x)$ 的值域为$[-2,2]$. .... 6 分

（2）$\because\left[f(x)-\sqrt{2}\right]\left[f(x)-2\sqrt{2}\right]\le0\ \therefore\sqrt{2}\le f(x)\le2\sqrt{2}$ .... 7 分

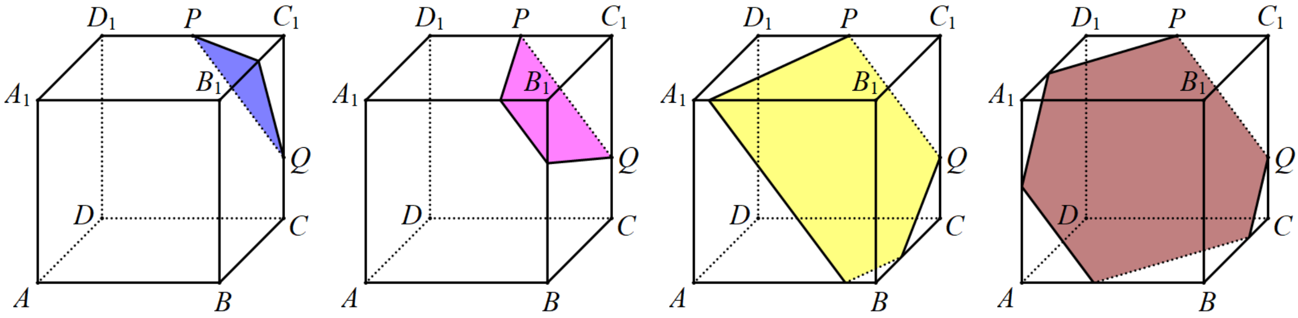
即 $\sqrt{2}\le2\cos(2x+\frac{\pi}{3})\le2\sqrt{2}\ \therefore\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos(2x+\frac{\pi}{3})\le\sqrt{2}$

结合余弦曲线知，$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$， .... 9 分

$\therefore-\frac{7\pi}{24}+k\pi\le x\le-\frac{\pi}{24}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\ \therefore M=\left[-\frac{7\pi}{24}+k\pi,-\frac{\pi}{24}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$ .... 10 分

又 $P=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|1\le x\le5\right\}\quad\therefore M\cap P=\{3\}$. .... 12 分

21．（1）截面可以分别为三角形，四边形，五边形，六边形



（本小题作出三角形、四边形各得 1 分，五边形、六边形各得 2 分，共 6 分.）

（2）如图：连接 PQ 所在直线交 DC 延长线于 X ，交 DD_1 的延长线于 Z ；

连接直线 MX 交 BC 于 R ，交 DA 延长线于 Y ；

连接 YZ 分别交 AA_1, A_1D_1 于 S,T .则六边形 $PQRMST$ 即为截面. .... 8 分

$\because P$ 为 $C_1.D_1$ 的中点，Q 为 CC_1 的一个三等分点（靠近 C），$\therefore D_1P = PC_1 = 3$， $C_1Q = 4, QC = 2$，

可得 $D_1Z = 4, PZ = PQ = 5$， $CX = \frac{3}{2}$， $QX = \frac{5}{2}$，

又 $CD//AB$， $\frac{CR}{RB} = \frac{XR}{RM} = \frac{CX}{MB} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$， 所以 $CR = 2$， $RB = 4$ $XR = \frac{5}{2}$， $RM = 5$，

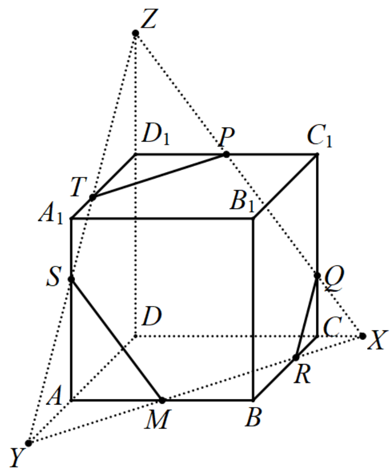
又 $AD//BC$， M 为 AB 的中点， $MY = 5$， $AY = 4$，所以 YDZ 为等腰直角三角形，

所以 $YS = 4\sqrt{2}$， $ST = 2\sqrt{2}$， $TZ = 4\sqrt{2}$， $YZ = 10\sqrt{2}$， $XY = XZ = \frac{25}{2}$，

$\therefore \triangle XYZ$ 为等腰三角形，等边上的高为 $\frac{5}{2}\sqrt{17}$， $S_{\triangle XYZ} = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{17} = \frac{25}{2}\sqrt{34}$

$S_{\triangle XQR} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$， $S_{\triangle PZT} = S_{\triangle MSY} = 2\sqrt{34}$

所以 $S_{PQRMST} = S_{\triangle XYZ} - S_{\triangle XQR} - S_{\triangle PTZ} - S_{\triangle MSY} = \frac{25}{2}\sqrt{34} - \frac{\sqrt{34}}{2} - 2\sqrt{34} - 2\sqrt{34} = 8\sqrt{34}$ .... 12 分



方法二：可证明 $PQRM$ 与 $PTSM$ 是全等的等腰梯形， $PM = 6\sqrt{2}$， $QR = 2\sqrt{2}$， $PQ = RM = 5$，所以等腰梯

形 $PQRM$ 的高为 $\sqrt{17}$，所以 $S_{PQRMST}=2S_{PQRM}=2\times\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\sqrt{17}=8\sqrt{34}$.

22．（1）由题：$\angle ADC=360^0-(120^0+90^0+60^0+\theta)=90^0-\theta.$

在 ΔABC 中，由正弦定理：$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$ 即：$AC=2\sqrt{3}\cos\theta,$ .... 1 分

在 ΔABC 中，$\because\angle ACB=\theta,\therefore\angle CAB=60^0-\theta.$ 由正弦定理：$\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BC}{\sin(60^0-\theta)}=\frac{AC}{\sin120^0}=4\cos\theta,$

$AB=4\cos\theta\sin\theta=2\sin2\theta,BC=4\cos\theta\sin(60^0-\theta).$ .... 3 分

$\therefore S=AB+BC=2\sin2\theta+4\cos\theta\sin(60^0-\theta)$ 且 $\theta\in(0,60^0)$.

又 $S=\sin2\theta+\sqrt{3}\cos2\theta+\sqrt{3}=2\sin(2\theta+60^0)+\sqrt{3}$ .... 5 分

$\because\theta\in(0,60^0),\therefore2\theta+60^0\in(0,180^0),\therefore S$ 的最大值为 $2+\sqrt{3},$ 当且仅当 $\theta=15^0$ 时取得等号. .... 6 分

（2）由（1）知：$BC=4\cos\theta\sin(60^0-\theta),CD=2\sqrt{3}\sin(\theta+30^0).$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot4\cos\theta\sin(60^0-\theta)\cdot2\sqrt{3}\sin(\theta+30^0)\cdot\sin(60^0+\theta)$ .... 7 分

$\therefore S=\sqrt{3}\sin(2\theta+60^0)\left[\sin(2\theta+60^0)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ .... 10 分

不妨设 $t=\sin(2\theta+60^0)$ 又 $\because\theta\in(0,60^0)\therefore2\theta+60^0\in(60^0,180^0),t\in(0,1]$.

$\therefore S=\sqrt{3}t^2+\frac{3}{2}t$ 而 S 在 $t\in(0,1]$ 上单调递增，$S_{\max=}S(1)=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$，当且仅当 $\theta=15^0$ 时取得等号.............. 12 分