

【机密】2023 年
5 月 13 日前

高 2023 届学业质量调研抽测（第三次）

数学试卷

（数学试题卷共 6 页，考试时间 120 分钟，满分 150 分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的学校、姓名、考号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 2x \leq 0\}$ ， $N = \{x | \log_2(x-1) < 1\}$ ，则 $M \cap N =$

- A. $[0, 2]$ B. $(1, 2]$ C. $(0, 3)$ D. $[2, 3)$

2. 设 z_1, z_2 是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 在复数范围内的两个解，则

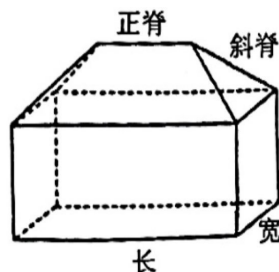
- A. $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ B. $|z_1| = \sqrt{2}$ C. $z_1 + z_2 = 1$ D. $z_1^3 = z_2^3 = 1$

3. “ $x > 2$ ”是“ $2^x - \frac{4}{2^x} > 3$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. “帷幄”是古代打仗必备的帐篷，又称“惺帐”。如图是的一种幄帐示意图，帐顶采用“五脊四坡式”，四条斜脊的长度相等，一条正脊平行于底面。若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为 $\frac{1}{2}$ ，底面矩形的长与宽之比为 5:3，则正脊与斜脊长度的比值为

- A. 1 B. $\frac{9}{10}$
C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{3}{5}$



第 4 题图



5. 已知变量 y 关于 x 的回归方程为 $y = e^{bx-0.6}$, 若对 $y = e^{bx-0.6}$ 两边取自然对数, 可以发现 $\ln y$ 与 x 线性相关, 现有一组数据如下表所示:

x	1	2	3	4	5
y	e	e^3	e^4	e^6	e^7

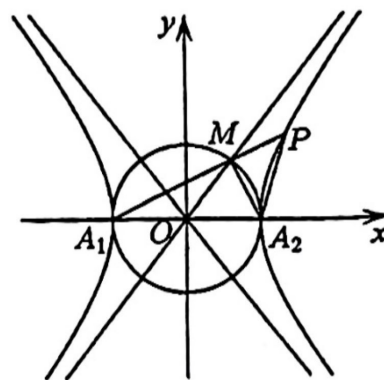
则当 $x = 6$ 时, 预测 y 的值为

- A. 9 B. 8 C. e^9 D. e^8

6. 如图, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右顶点

分别是 A_1, A_2 , 圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 与双曲线 C 的渐近线在第一象限的交点为 M , 直线 A_1M 交双曲线 C 的右支于点 P , 若 $\triangle MPA_2$ 是等腰三角形, 且 $\angle PA_2M$ 的内角平分线与 y 轴平行, 则双曲线 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$



第6题图

7. 已知 \vec{a}, \vec{b} 均为单位向量, 且夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若向量 \vec{c} 满足 $(\vec{c} - 2\vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大

值为

- A. $\frac{7+\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x+2|+1, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$, 若存在实数 a, b, c , 当 $a < b < c$ 时, 满足

$f(a) = f(b) = f(c)$, 则 $af(a) + bf(b) + cf(c)$ 的取值范围是

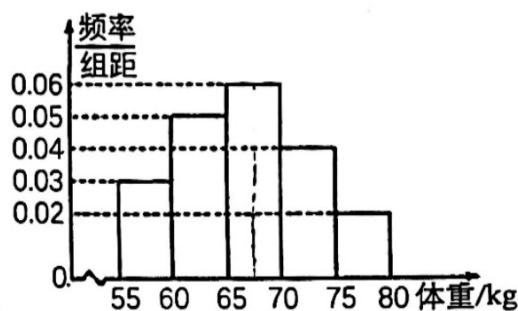
- A. $(-4, 0)$ B. $[-4, 0)$ C. $[-3, 0)$ D. $(-3, 0)$



二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 教育部办公厅“关于进一步加强中小学生体质健康管理工作的通知”中指出，各地要加强对学生体质健康重要性的宣传，中小学校要通过体育与健康课程、大课间、课外体育锻炼、体育竞赛、班团队活动，家校协同联动等多种形式加强教育引导，让家长 and 中小学生学习科学认识体质健康的影响因素，了解运动在增强体质、促进健康、预防肥胖与近视、锤炼意志、健全人格等方面的重要作用，提高学生体育与健康素养，增强体质健康管理的意识和能力，某学校共有 2000 名男生，为了了解这部分学生的身体发育情况，学校抽查了 100 名男生的体重情况。根据所得数据绘制样本的频率分布直方图如图所示，则下列结论正确的是

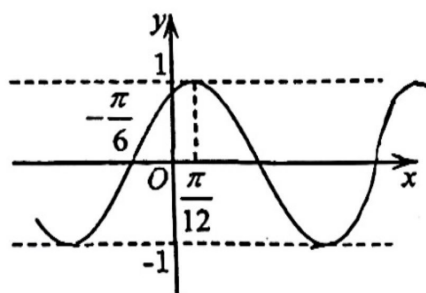
- A. 样本的众数为 $67\frac{1}{2}$
- B. 样本的中位数为 $66\frac{2}{3}$
- C. 样本的平均值为 66
- D. 该校男生体重超过 70 公斤的学生大约为 600 人



第 9 题图

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则下列结论正确的是

- A. 直线 $x = -\frac{2\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴
- B. 函数 $f(x)$ 的图象可由 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到
- C. 若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ ，则 $|x_2 - x_1|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$
- D. 方程 $f(x) = \log_{2\pi} x$ 有 3 个实根



第 10 题图

11. 已知 $x > 0, y > 0$ ，且 $x + y + xy - 3 = 0$ ，则下列结论正确的是

- A. xy 的取值范围是 $(0, 9]$
- B. $x + y$ 的取值范围是 $[2, 3)$
- C. $x + 2y$ 的最小值是 $4\sqrt{2} - 3$
- D. $x + 4y$ 的最小值是 3



12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M 为棱 CC_1 上的动点, $AM \perp$ 平面 α , 下面说法正确的是

A. 若 N 为 DD_1 中点, 当 $AM + MN$ 最小时, $\frac{CM}{CC_1} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 若点 M 为 CC_1 的中点, 平面 α 过点 B , 则平面 α 截正方体所得截面图形的面积为 $\frac{9}{2}$

C. 直线 AB 与平面 α 所成角的正弦值的取值范围为 $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

D. 当点 M 与点 C_1 重合时, 若平面 α 截正方体所得截面图形的面积越大, 则其周长就越大

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 计算 $\frac{2\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的正整数 m, n , 都有 $a_m a_n = a_{m+n}$, 且 $a_2 = 3$, 则 $a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 4x$, 圆 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 2$, 直线 $l: y = k(x-1)$ 与 C_1 交于 A, B 两点, 与 C_2 交于 M, N 两点, 若 $|AB| = 8$, 则 $|MN| = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行, 则 $x_1 + g(x_2) = \underline{\hspace{2cm}}$; 若 $a > 0$,

$ax^a \cdot g(x) \leq x \cdot f(x)$ 对于任意的 $x > 1$ 都成立, 则 a 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_4 + a_7 = 20$, $S_9 = 27a_2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{2}{\sqrt{a_{n+2}} + \sqrt{a_n}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: 当 $n \geq 3$ 时, $2T_n > \sqrt{a_{n+1}}$.



18. (12 分)

在① $(2b-c)\cos A = a\cos C$, ② $a\sin B = \sqrt{3}b\cos A$, ③ $a\cos C + \sqrt{3}c\sin A = b+c$, 这三个

条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并完成解答.

问题: 锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知_____.

(1) 求 A ;

(2) 若 $b = 2$, D 为 AB 的中点, 求 CD 的取值范围.

19. (12 分)

在“五·一”节日期间, 某商场准备举行有奖促销活动, 顾客购买超过一定金额的商品后均有一次抽奖机会. 抽奖规则如下: 将质地均匀的转盘平均分成 n ($n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$) 个扇区, 每个扇区涂一种颜色, 所有扇区的颜色各不相同, 顾客抽奖时连续转动转盘三次, 记录每次转盘停止时指针所指扇区内的颜色 (若指针指在分界线处, 本次转动无效, 需重转一次), 若三次颜色都一样, 则获得一等奖; 若其中两次颜色一样, 则获得二等奖; 若三次颜色均不一样, 则获得三等奖.

(1) 若一、二等奖的获奖概率之和不大于 $\frac{4}{9}$, 求 n 的最小值;

(2) 规定一等奖返还现金 108 元, 二等奖返还现金 60 元, 三等奖返还现金 18 元, 在 n 取 (1) 中的最小值的情况下, 求顾客在一次抽奖中获奖金额的分布列和数学期望.



20. (12 分)

如图 1 所示, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AD \perp CD$, $BC=2$, $AD=3$, $CD=\sqrt{3}$, 边 AD 上一点 E 满足 $DE=1$, 现将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到 $\triangle PBE$ 的位置, 使平面 $PBE \perp$ 平面 $BCDE$, 如图 2 所示.

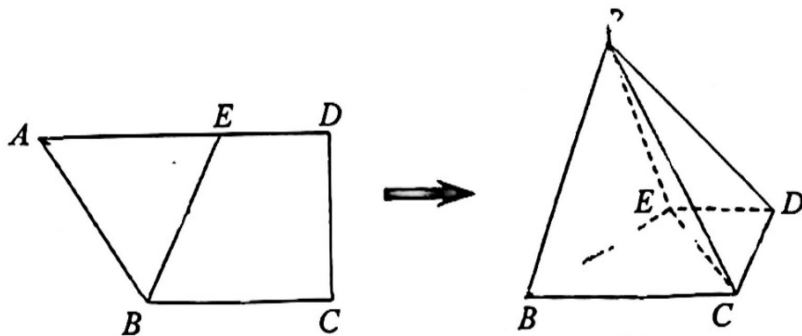


图 1 第 20 题图

- (1) 求证: $PC \perp BE$;
- (2) 求平面 PBE 与平面 PCE 所成锐二面角的余弦值.

21. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

M 为椭圆上一动点, $\triangle MF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

- (1) 求椭圆 E 的标准方程;
- (2) 设点 N 为椭圆 E 与 y 轴负半轴的交点, 不过点 N 且不垂直于坐标轴的直线 l 交椭圆 E 于 S, T 两点, 直线 NS, NT 分别与 x 轴交于 C, D 两点, 若 C, D 的横坐标之积是 2. 问: 直线 l 是否过定点? 如果是, 求出定点坐标, 如果不是, 请说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = [x^2 + (a-2)x + 2-a]e^{x-1}, a \in \mathbb{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $a=0$ 时, 若函数 $g(x) = f(x) - m(x-1) - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上有两个不同零点, 求实数 m 的取值范围.

