重庆市育才中学校高 2023 届高考冲刺考试 1
数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1～4．DBDC；　　5～8． CAAB.

二、选择题：本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．AB； 10．BD； 11．ABD； 12．ACD.

三、填空题：本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13． 6； 14． $(8+4\sqrt{5})\pi$； 15． 60； 16． $(1,e)$.

四、解答题：

17．（1）因为 $S_{n+1}=S_n+a_n+2$，所以 $S_{n+1}-S_n=a_n+2$,即 $a_{n+1}=a_n+2$,即 $a_{n+1}-a_n=2$.

所以 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项，公差为 2 的等差数列。所以 $a_n=2n-3$ ……………………………………………5 分

（2） 由（1）知 $a_n=2n-3$，所以 $b_n=\sqrt{2}^{a_n+1}=2^{n-1}$. $\{b_n\}$ 为首项为 1,公比为 2 的等比数列。………………8 分

$T_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$ ……………………………………………10 分

18．（1）列联表如下：

	关注	不关注	合计
男生	60	60	120
女生	20	60	80
合计	80	120	200

……………………………………………2 分

零假设为 H_0：学生关注 *ChatGPT* 与性别无关

根据表中数据，经计算得：$\chi^2=\dfrac{200\times(60\times60-20\times60)^2}{120\times80\times80\times120}=12.5$，又 $12.5>10.828$，……………………………4 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，

即认为学生关注 *ChatGPT* 与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.001．……………………………6 分

（2）由（1）可知，关注的学生中，男女比例为$3:1$，

则抽出的 8 人中，男生有 6 人，女生有 2 人，................................8 分

则ξ的对应值有$1,3$，则$P(\xi=1)=\dfrac{C_6^1\cdot C_2^2+C_6^2\cdot C_2^1}{C_8^3}=\dfrac{9}{14}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_6^3\cdot C_2^0}{C_8^3}=\dfrac{5}{14}$，则$\xi$的分布列为

ξ	1	3
P	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{5}{14}$

................................10 分

$E\left(X\right)=1\times\dfrac{9}{14}+3\times\dfrac{5}{14}=\dfrac{12}{7}$．................................12 分

19．（1）若选① $\sqrt{2}c\sin(A+\dfrac{\pi}{4})=b$，

由正弦定理，得$\sqrt{2}\sin C\left(\sin A\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos A\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin B$，即$\sin C\sin A+\sin C\cos A=\sin B$ ....3 分

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin B=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

由$\sin A\neq 0$，得$\sin C=\cos C$，即$\tan C=1$.因为$0<C<\pi$，所以$C=\dfrac{\pi}{4}$ ....6 分

若选② $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+C\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{6}+C\right)\right]\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+C\right)=\sin(\dfrac{\pi}{6}+C)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+C\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2C\right)}{2}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2C\right)=\dfrac{1}{2}$，.......................................3 分

因为$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，得$\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}+2C<\dfrac{4\pi}{3}$，所以$\dfrac{\pi}{3}+2C=\dfrac{5\pi}{6}$，解得$C=\dfrac{\pi}{4}$． ....6 分

（2）法 1：因为延长BA于点E,使$BE=2BA$，所以$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$，....................9 分

所以$\overrightarrow{CE}^2=4\overrightarrow{CA}^2-4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2=4b^2+a^2-4ab\cos C=4$,所以$CE=2$ ....12 分

法 2: 因为延长BA于点E,使$BE=2BA$,所以$AE=BA=c$在$\triangle ABC$中由余弦定理得$\cos\angle CAB=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

在$\triangle ACE$中由余弦定理得$\cos\angle CAE=\dfrac{b^2+c^2-CE^2}{2bc}$

因为$\cos\angle CAB+\cos\angle CAE=0$，所以$CE^2=2c^2-6$ ....9 分

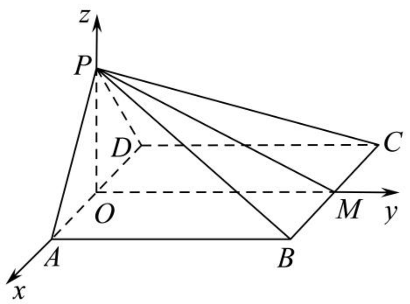
因为在$\triangle ABC$中由余弦定理得：$\cos\angle ACB=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{4\sqrt{2}b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即$c^2=5$所以$CE=2$，....................12 分

20．（1）证明：由$\angle PAD=\angle PDA=\dfrac{\pi}{4}$，得$PA=PD$，所以$PO\perp AD$． ....2 分

由四边形$ABCD$为平行四边形，得$AB=CD$，$AD\,//\,BC$，$AB\,//\,OM$，

又因为$PB=PC$，所以$PM\perp BC$，所以$PM\perp AD$，....................4 分

因为$PM\perp AD$，$PO\perp AD$，$PO\cap PM=P$，所以$AD\perp$平面POM． ....6 分



（2）因为$PA=AB=2$，$PB=2\sqrt{2}$，所以$PA^2+AB^2=PB^2$,即$PA\perp AB$，易得$AP\perp OM$.

由（1）知$AD\perp OM$，所以$OM\perp$平面ADP，则$OP\perp OM$

所以以O为原点，OA，OM，OP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则：$B\left(\sqrt{2},2,0\right)$，$C\left(-\sqrt{2},2,0\right)$，$P\left(0,0,\sqrt{2}\right)$,$\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{2},0,0\right)$,$\overrightarrow{PB}\left(\sqrt{2},2,-\sqrt{2}\right)$....................8 分

设平面PBC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{2}x+2y-\sqrt{2}z=0\\ -2\sqrt{2}x=0\end{cases}$，令$y=1$，则$\vec{n}=\left(0,1,\sqrt{2}\right)$.

显然平面PAD的法向量为$\overrightarrow{m}=(0,1,0)$....................10 分

设平面PAD与平面PBC所成的角为θ，则$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{m}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{m}\right|}=\left|\dfrac{0+1+0}{\sqrt{3}\times1}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$....................12 分

21．（1）设椭圆E的长轴长为$2a$，则$a=2,e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{2}$，....................2 分

由题意可得$\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{c^2}{4}}{b^2}=1\\ 4=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}c^2=3\\ b^2=1\end{cases}$，故$E$的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.....................4 分

（2）平行四边形$OMPN$的面积为定值$\sqrt{15}$，理由如下：

由（1）可得：$a=2,b=1$，则有：

当直线l的斜率不存在时，设$A\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_1,-y_1\right)$，

若$OMPN$为平行四边形，则点P为长轴顶点，不妨设$P(2,0)$，

可得$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ \left|y_1\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\end{cases}$，故平行四边形$OPMN$的面积$S=8\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}$；.................6 分

当直线l的斜率存在时，设$l:y=kx+m(m\neq0)$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$

联立方程$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$得$\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

则$\Delta=64k^2m^2-4\left(1+4k^2\right)\left(4m^2-4\right)=16\left(4k^2-m^2+1\right)>0, x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}, x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$， ....8 分

可得$y_1+y_2=kx_1+m+kx_2+m=k\left(x_1+x_2\right)+2m=-\dfrac{8k^2m}{1+4k^2}+2m=\dfrac{2m}{1+4k^2}$，

$\because \overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OC}$ $\quad\therefore \overrightarrow{OM}=(2x_1,2y_1)$，$\overrightarrow{ON}=(2x_2,2y_2)$

若$OMPN$为平行四边形，则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\left(2x_1+2x_2,2y_1+2y_2\right)=\left(-\dfrac{16km}{1+4k^2},\dfrac{4m}{1+4k^2}\right)$，

即点$P\left(-\dfrac{16km}{1+4k^2},\dfrac{4m}{1+4k^2}\right)$在椭圆上，则$\dfrac{\left(-\dfrac{16km}{1+4k^2}\right)^2}{4}+\left(\dfrac{4m}{1+4k^2}\right)^2=1$，

整理可得$16m^2=1+4k^2$，满足$\Delta=16\left(4k^2-m^2+1\right)=240m^2>0$， ....10 分

可得$\left|AC\right|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{15m^2}}{4m^2}$，

点O到直线$l:kx-y+m=0$的距离$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

故平行四边形$OMPN$的面积$S=8\times\dfrac{1}{2}\times\left|AC\right|\times d=\sqrt{15}$；

综上所述：平行四边形$OMPN$的面积为定值$\sqrt{15}$ ....12 分

22.（1）$f'(x)=\dfrac{2a}{x}+2x=\dfrac{2x^2+2a}{x},(x>0)$ ....1 分

①当$a\geq 0$时，$f'(x)>0$恒成立，此时函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；.....................2 分

②当$a<0$时，$f'(x)=0$的根为$\sqrt{-a}$.

$f'(x)\leq 0$在$(0,\sqrt{-a})$恒成立，所以$f(x)$在$(0,\sqrt{-a})$上单调递减.

$f'(x)\geq 0$在$(\sqrt{-a},+\infty)$恒成立，所以$f(x)$在$(\sqrt{-a},+\infty)$上单调递增......................3 分

综上：$a\geq 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

$a<0$时，$f(x)$在$(0,\sqrt{-a})$上单调递减，$f(x)$在$(\sqrt{-a},+\infty)$上单调递增......................4 分

（2）$g(x)=2e\ln x+x^2+x, x>0$

由$g(x_1)+g(x_2)=4e+2\sqrt{e}$，即$2e\ln x_1+x_1{}^2+x_1+2e\ln x_2+x_2{}^2+x_2-4e-2\sqrt{e}=0$，

从而$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-4e-2\sqrt{e}=2x_1x_2-2e\ln(x_1x_2)$ ....6 分

令$t=x_1x_2$，则由$G(t)=2t-2e\ln t$得：$G'(t)=2-\dfrac{2e}{t}$

可知，$G(t)$在区间$(0,e)$上单调递减，在区间$(e,+\infty)$上单调递增......................8 分

所以 $G(t) \ge G(e) = 0$ ，所以 $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) - 4e - 2\sqrt{e} \ge 0$ ，

即 $(x_1 + x_2 - 2\sqrt{e})(x_1 + x_2 + 2\sqrt{e} + 1) \ge 0$ ....10 分

又因为 x_1，$x_2 > 0$，所以 $x_1 + x_2 \ge 2\sqrt{e}$ ....12 分

法 2： $g(x) = 2e\ln x + x^2 + x, x > 0$ ， $g'(x) = \dfrac{2e}{x} + 2x + 1, x > 0$

显然 $g'(x) > 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

注意到 $g(x_1) + g(x_2) = 4e + 2\sqrt{e} = 2g(\sqrt{e})$ ，所以不妨设 $0 < x_1 \le \sqrt{e} \le x_2$

欲证 $x_1 + x_2 \ge 2\sqrt{e}$ ，即证 $x_2 \ge 2\sqrt{e} - x_1$ ，因为 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以即证 $g(x_2) \ge g(2\sqrt{e} - x_1)$ ，

又因为 $g(x_1) + g(x_2) = 4e + 2\sqrt{e}$ ，所以即证 $4e + 2\sqrt{e} \ge g(x_1) + g(2\sqrt{e} - x_1)$ ....6 分

令 $h(x) = g(x) + g(2\sqrt{e} - x)$ ， $0 < x \le \sqrt{e}$

$h'(x) = \dfrac{2e}{x} + 2x + 1 - \dfrac{2e}{2\sqrt{e} - x} - 2(2\sqrt{e} - x) - 1 = \dfrac{(x - \sqrt{e})^3}{x(x - 2\sqrt{e})} \ge 0$ ....10 分

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增.

$h(x)_{\max} = h(\sqrt{e}) = 4e + 2\sqrt{e}$ ，所以 $4e + 2\sqrt{e} \ge g(x_1) + g(2\sqrt{e} - x_1)$ 得证，即 $x_1 + x_2 \ge 2\sqrt{e}$ ....12 分