重庆市育才中学校高2023届高三（下）第四周定时训练

数学试题（一）

（满分150分，考试时间120分钟）

本试卷为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。

注意事项： 1. 作答前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在试卷的规定位置上。

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效。

3. 考试结束后，答题卡、试卷、草稿纸一并收回。

第Ⅰ卷

一．选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知$P=\{x|x=2k-1,x\in N\}$，$Q=\{x|\log_2 x\le 2\}$，则$P\cap Q=$（　）

A．$\{-1,1,3\}$　　B．$\{1,3\}$　　C．$\{0,2,4\}$　　D．$\{2,4\}$

2．“$a=1$”是“复数$\frac{a+i}{1-i}(a\in R)$为纯虚数”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

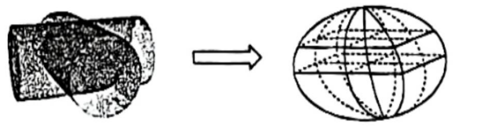
3．在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，且$a_{n+1}+a_n=2n$，则其前31项和S_{31}的值为（　）

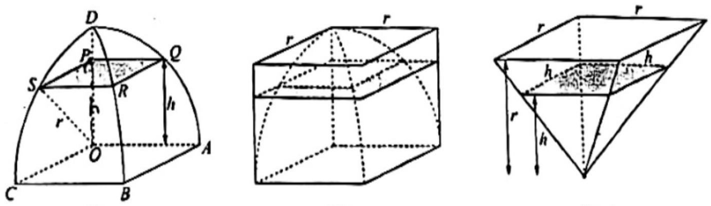
A．361　　B．423　　C．481　　D．523

4．已知$P(1,2)$为角α终边上一点，则$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=$（　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．-3　　D．$\frac{1}{9}$

5．刘徽构造的几何模型“牟合方盖”中说：“取立方棋八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆困，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。”牟合方盖是一个正方体被两个圆柱从纵横两侧面作内切圆柱体时的两圆柱体的公共部分，计算其体积的方法是将原来的“牟合方盖”平均分为八份，取它的八分之一（如图一）。记正方形$OABC$的边长为r，设$OP=h$，过P点作平面$PQRS$平行于平面$OABC$。$OS=OO=r$，由勾股定理有$PS=PQ=\sqrt{r^2-h^2}$，故此正方形$PQRS$面积是r^2-h^2。如果将图一的几何体放在棱长为r的正方体内（如图二），不难证明图二中与图一等高处阴影部分的面积等于h^2。（如图三）设此棱锥顶点到平行于底面的截面的高度为h，不难发现对于任何高度h，此截面面积必为h^2，根据祖暅原理计算牟合方盖体积为（　）





图一　　图二　　图三

注：祖暅原理：“幂势既同，则积不容异”。意思是两个同高的立体，如在等高处的截面积相等，则体积相等

A．$\frac{8}{3}r^3\pi$　　B．$\frac{8}{3}r^3$　　C．$\frac{16}{3}r^3\pi$　　D．$\frac{16}{3}r^3$

6. 已知$\left(2x-\frac{1}{mx}-1\right)^6$的展开式中$x^2$的系数为$-40$，则实数$m=$（　）

A. 4　　　　B. 2　　　　C. -2　　　　D. -4

7. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$C$的左焦点作一条直线与椭圆相交于$A$，$B$两点，若$\overrightarrow{BF_1}=\overrightarrow{F_1H}=\overrightarrow{HA}$且$\overrightarrow{HF_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则$C$的离心率为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　　　B. $\frac{2}{3}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知P为抛物线$C:y^2=8x$上的动点，Q为直线$l:x-y+4=0$上的动点，过点P作圆$E:(x-3)^2+y^2=8$的切线，切点为A，则$|PQ|+|PA|$的最小值为（　）

A. $\sqrt{2}+1$　　　　B. $2\sqrt{2}-1$　　　　C. $3\sqrt{2}-1$　　　　D. $3\sqrt{2}-2$

二．选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 新中国成立至今，我国一共进行了7次全国人口普查，历次普查得到的全国人口总数如图1所示，城镇人口比重如图2所示。下列结论正确的有（　）

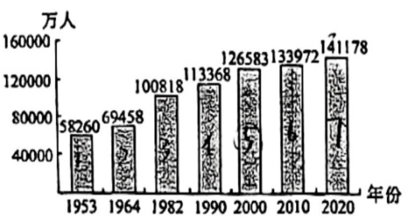


图1

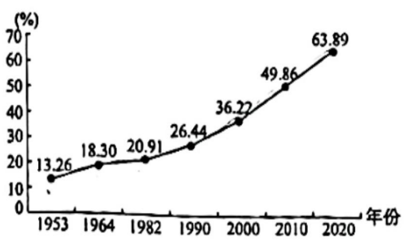


图2

A. 与前一次全国人口普查对比，第五次总人数增长量高于第四次总人数增长量

B. 对比这7次全国人口普查的结果，我国城镇人口数量逐次递增

C. 第三次全国人口普查城镇人口数量低于2亿

D. 第六次全国人口普查城镇人口数量超过第二次全国人口普查总人口数

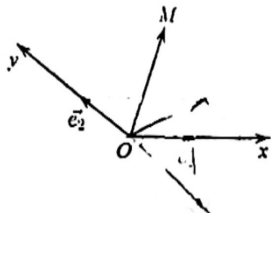
10. 在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，则下列结论正确的是（　）

A. $\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$　　　　B. $CA\cdot CB<0$

C. 若$c=6$，则ΔABC的面积是15　　　　D. 若$b+c=8$，则ΔABC外接圆半径是$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

11. 如图所示，设Ox、Oy是平面内相交成$\theta\left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$角的两条数轴，$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$分别是与$x$、$y$轴正方向同向的单位向量，则称平面坐标系$xOy$为$\theta$仿射坐标系，若$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，则把有序数对$(x,y)$叫做向量$\overrightarrow{OM}$的仿射坐标，记为$\overrightarrow{OM}=(x,y)$．在$\theta=\frac{2\pi}{3}$的仿射坐标系中，$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(2,1)$．则下列结论中，正确的是（　）

A. $\vec{a}-\vec{b}=(-1,-3)$　　　　B. $|\vec{a}|=\sqrt{5}$



C. $\vec{a}\perp\vec{b}$　　　　D. $\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{b}$

12. 已知$\triangle ABC$中，$AB=3,AC=5,BC=7,O$为$\triangle ABC$外接圆的圆心，I为$\triangle ABC$内切圆的圆心，则下列叙述正确的是（　）

A. $\triangle ABC$外接圆半径为$14\sqrt{3}$/[illegible]　　　　B. $\triangle ABC$内切圆半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\overline{AO}\cdot\overline{BC}=8$　　　　D. $\overline{AI}\cdot\overline{BC}=1$

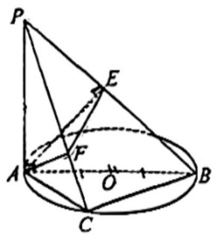
第Ⅱ卷

三. 填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 将编号为1，2，3，4的4个小球放入3个不同的盒子中，每个盒子不空，若放在同一盒子里的2个小球编号不相邻，则共有________种不同的放法。

14. 已知$x^2+y^2=3$，$a^2+b^2=4$，$x,y,a,b\in R$，则$ax+by$的取值范围为________.

15. 已知抛物线C：$x^2=4y$的焦点为F，点P的坐标为$(2,1)$，动点A,B在抛物线C上，且$PA\perp PB$，则$FA+FB$的最小值是________.



16. 如图，已知AB为圆O的直径，C为圆上一动点，$PA\perp$圆O所在平面，且$PA=AB=2$，过点A作平面$\alpha\perp PB$，交PB,PC分别于E,F，则三棱锥$P-AEF$外接球的表面积为________；当三棱锥$P-AEF$体积最大时，$\tan\angle BAC=$________.

四. 解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 在①a_1，$\frac{1}{4}$，a_2成等差数列，②a_1，a_2+1，a_3成等比数列，③$S_3=\frac{3}{4}$，三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并作答。(注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分。)

已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$3S_n=a_n+2a_1(n\in N^*)$，$a_1\neq 0$，且________.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=-a_n\cdot\log_2 a_n^2$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$。

18. 原定于2022年9月在杭州举行的亚运会延期至2023年的9月，据调查此次亚运会已签约145家赞助企业，亚运会赞助成为一项跨度时间较长的营销方式，为了解其中在浙江地区的50家赞助企业每天销售额与每天线上销售时间之间的相关关系，某平台对50家赞助企业进行跟踪调查，其中每天线上销售时间不少于8小时的企业有30家，销售额不足50万元的企业有25家，统计后得到如下2×2列联表：

	销售额不少于50万元	销售额不足50万元	合计
线上销售时间不少于8小时	17		30
线上销售时间不足8小时			
合计			50

（1）请完成上面的2×2列联表，并依据$\alpha=0.05$的独立性检验，能否认为赞助企业每天的销售额与每天线上销售时间有关；

（2）（i）按销售额进行分层随机抽样（等比例抽样），在线上销售时间不足8小时的赞助企业中抽取5家，求销售额不少于50万元和销售额不足50万元的企业数；

（ii）从销售额不少于50万元的企业抽取2家时，设抽到每天线上销售时间不足8小时的企业数是X，求X的分布列及期望值。

附：

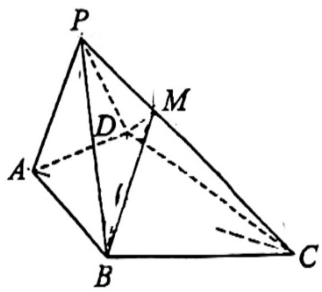
α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ_{α}	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$。

19．已知ΔABC中，角A，B，C的对应边分别为a，b，c，其中$b=2c\cdot\cos(B+C)$，$(2b+c)\cos A+a\cdot\cos C=0$，且$\Delta ABC$外接圆的半径为2。

（1）求a，b，c值；

（2）设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda,\mu\in R)$，$\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{MF}$，若$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{2}{3}$，求$\lambda^2+\mu^2$的最大值。



20．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AB=2\sqrt{3}$，$CB=CD=\sqrt{39}$，点P在底面$ABCD$的射影恰是等边三角形ABD的中心．点M在棱PC上，且满足$\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PM}$。

（1）求证：$PA//$平面BDM；

（2）若直线PA与平面$ABCD$所成角的正切值为$\dfrac{3}{2}$，求平面PAB与平面BDM所成角的余弦值。

21．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点是椭圆$\dfrac{x}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$的右顶点，且椭圆的右顶点到双曲线的一条渐近线的距离为3。

（1）求双曲线C的方程；

（2）$P\left(2,\sqrt{3}\right)$为双曲线C上一定点，M，N为双曲线C上两个动点，直线PM，PN的斜率k_1，k_2满足$k_1k_2=1$，求证：直线MN恒过一个定点，并求出该定点的坐标。

22．已知函数$f(x)=xe^x-a\left(x^3-3x\right)$，$a>0$．

（1）讨论函数$f(x)$极值点的个数；

（2）设$m>0$，若$a=1$且$f\left(me^x\right)\geq f\left(\sqrt{x}(2x-\ln x-1)\right)$对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立，求$m$的取值范围。