

数 学 试 题（二）

参 考 答 案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	C	A	D	A	A	B

7. 【详解】因为 $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{HA}$ 且 $\overrightarrow{HF_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ，所以直线 HF_2 为线段 AF_1 的垂直平分线，所以 $|AF_2| = |F_1F_2| = 2c$ 。

由椭圆定义知 $|AF_1| = 2a - 2c$ ，所以 $|AH| = |F_1H| = |BF_1| = a - c$ ，所以 $|BF_2| = a + c$ ， $|BH| = 2a - 2c$ 。

在 $\text{Rt}\triangle AHF_2$ 中， $|AF_2|^2 - |AH|^2 = |HF_2|^2$ ，在 $\text{Rt}\triangle BHF_2$ 中， $|BF_2|^2 - |BH|^2 = |HF_2|^2$ ，所以 $|AF_2|^2 - |AH|^2 = |BF_2|^2 - |BH|^2$ ，

即 $(2c)^2 - (a - c)^2 = (a + c)^2 - (2a - 2c)^2$ ，化简得 $3c^2 - 4ac + a^2 = 0$ ，即 $3\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) + 1 = 0$ ，即

$3e^2 - 4e + 1 = 0 (0 < e < 1)$ ，

解得椭圆 C 的离心率 $e = \frac{1}{3}$ ($e = 1$ 舍去)。

8. 【详解】因为 $\alpha e^\alpha = e^3$ ， $\beta(\ln \beta - 1) = e^3$ ，所以 $\alpha + \ln \alpha = 2$ ， $\ln \beta + \ln(\ln \beta - 1) = 3$ ，

即 $\alpha + \ln \alpha - 2 = 0$ ， $\ln \beta - 1 + \ln(\ln \beta - 1) - 2 = 0$ ，所以 α ， $\ln \beta - 1$ 均为方程 $x + \ln x - 2 = 0$ 的根，

由于函数 $f(x) = x + \ln x - 2$ 在定义域内单调递增，且 $f(1) \cdot f(2) < 0$ ，所以方程 $x + \ln x - 2 = 0$ 的根唯一，

所以 $\alpha = \ln \beta - 1 \Leftrightarrow 2 - \ln \alpha = \ln \beta - 1 \Leftrightarrow \ln \alpha + \ln \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha \beta = e^3$ 。

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AB	AD	AD	ACD

11. 【详解】对于 A 选项， $\vec{a} - \vec{b} = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) - (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = (-1, -3)$ ，A 对；

对于 B 选项， $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)^2} = \sqrt{\vec{e}_1^2 + 4\vec{e}_2^2 - 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2} \cos \frac{2\pi}{3} = \sqrt{7}$ ，B 错；

对于 C 选项， $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2\vec{e}_1^2 - 3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2 - 3 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2}$ ，C 错；

对于 D 选项， $|\vec{b}|^2 = (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)^2 = 4\vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cos \frac{2\pi}{3} = 3$ ，

所以， \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为 $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{2} \vec{b}$ ，D 对。

12. 【详解】解：对于 A：取 AB 、 AC 中点 D 、 E ，连接 PD ， DE ， PE ， ME ， BE ，

因为 $PA = PB = 1$ ，所以 $PD \perp AB$ ，

又 $AB \perp BC$ ， $DE \parallel BC$ ，所以 $DE \perp AB$ ，所以 $\angle PDE$ 即为二面角 $P-AB-C$ 的平面角 θ ，

又 $PA \perp PB$ ， $AB = BC$ ，所以 $BC = AB = \sqrt{PB^2 + PA^2} = \sqrt{2}$ ，

所以 $DE = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2$ ， $PD = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

若 $PA \perp BC$ ，又 $PA \perp PB$ ， $PB \cap BC = B$ ， $PB, BC \subset$ 平面 PBC ，则 $PA \perp$ 平面 PBC ，

因为 $PC \subset$ 平面 PBC ，所以 $PA \perp PC$ ，所以 $PE = \frac{1}{2}AC = 1$ ，

则 $PD^2 + DE^2 = PE^2$ ，即 $\angle PDE = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，故 A 正确；

对于 B：若 $PC \perp$ 平面 PAB ， $AB \subset$ 平面 PAB ，则 $PC \perp AB$ ，又 $AB \perp BC$ ，

$PC \cap BC = C$ ， $PC, BC \subset$ 平面 PBC ，所以 $AB \perp$ 平面 PBC ， $PB \subset$ 平面 PBC ， $\therefore AB \perp PB$ ，

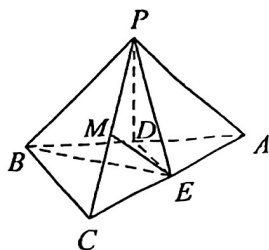
在 $\triangle ABP$ 中 $AB \perp PB$ 与 $PA \perp PB$ 矛盾，故 B 错误；

对于 C： $\because ME = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}$ ， $\therefore M$ 在半径为 $\frac{1}{2}$ 的球面上，故 C 正确；

对于 D，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $PE = 1$ ，所以 $EP = EA = EC = EB = 1$ ，

$\therefore E$ 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，外接球的半径为 1，

所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$ ，故 D 正确。



三. 填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	18	$[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$	11	0

15. 【详解】依题意，设 $A(4a, 4a^2), B(4b, 4b^2)$ ，

由于 A, B 与 P 不重合，则 $4a \neq 2, 4b \neq 2$ ，即 $2a \neq 1, 2b \neq 1$ ，

因为 $PA \perp PB$ ，所以

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (4a-2, 4a^2-1) \cdot (4b-2, 4b^2-1) = 4(2a-1)(2b-1) + (2a+1)(2a-1)(2b+1)(2b-1)$$

$$= (2a-1)(2b-1)[4 + (2a+1)(2b+1)] = (2a-1)(2b-1)[4ab + 2(a+b) + 5] = 0, \text{ 则 } 4ab = -2(a+b) - 5,$$

由抛物线的定义可得

$$FA + FB = 4a^2 + 1 + 4b^2 + 1 = 4a^2 + 4b^2 + 2 = 4(a^2 + b^2) + 2 = 4(a+b)^2 - 8ab + 2$$

$$= 4(a+b)^2 - 2[-2(a+b) - 5] + 2 = 4(a+b)^2 + 4(a+b) + 12,$$

$$\text{设 } t = a+b, \text{ 则 } FA + FB = 4t^2 + 4t + 12 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 11 \geq 11,$$

当且仅当 $a+b = t = -\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

解】(1) 如
 $= AD$, CL
 $\cdot O, C$ 共
 $2\sqrt{3}$ 且三角
 $\frac{\sqrt{3}}{2} AB =$
 $\frac{1}{2}$, 又 \overline{PC}
 AF , 又
 三角形.
 直线 P
 点 O ;
 所以 A
 点,
 系 O .

所以 $FA + FB$ 的最小值为 11.

16. 【详解】解: 设公切线与 $g(x) = \ln x$ 切于 $(x_2, \ln x_2)$,

由 $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, 则曲线 $f(x)$ 在 (x_1, y_1) 处的切线方程为 $y - (x_1^2 + 2) = 2x_1(x - x_1)$,

即 $y = 2x_1x - x_1^2 + 2$,

曲线 $g(x)$ 在 $(x_2, \ln x_2)$ 处的切线方程为 $y = \frac{x}{x_2} + \ln x_2 - 1$,

$$\therefore \begin{cases} 2x_1 = \frac{1}{x_2} \\ -x_1^2 + 2 = \ln x_2 - 1 \end{cases}, \text{ 得 } x_1^2 - \ln(2x_1) = 3, \therefore x_1^2 - \ln(2x_1) - 3 = 0,$$

故答案为: 0.

四. 解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 【详解】(1) 由已知 $3S_n = a_n + 2a_1$, 当 $n \geq 2$ 时, $3S_{n-1} = a_{n-1} + 2a_1$,

两式相减得到 $3a_n = a_n - a_{n-1}$, 即 $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}$, 因为 $a_1 \neq 0$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 从而 $a_n = a_1(-\frac{1}{2})^{n-1}$.

若选① $a_1, \frac{1}{4}, a_2$ 成等差数列,

因为 $a_1, \frac{1}{4}, a_2$ 成等差数列, 所以 $a_1 + a_2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, 即 $a_1 - \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}$, 解得 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$;

若选② $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等比数列,

因为 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等比数列, 所以 $a_1, -\frac{1}{2}a_1 + 1, \frac{1}{4}a_1$ 成等比数列, 所以 $(-\frac{1}{2}a_1 + 1)^2 = \frac{1}{4}a_1^2$, 解得 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$;

若选③ $S_3 = \frac{3}{4}$,

因为 $S_3 = \frac{3}{4}$, 所以 $a_1 - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}$, 解得 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$.

(2) $b_n = -a_n \log_2 a_n^2 = -(-\frac{1}{2})^{n-1} \log_2 (-\frac{1}{2})^{2n-2} = -(-\frac{1}{2})^{n-1} \log_2 (\frac{1}{2})^{2n-2} = (-\frac{1}{2})^{n-1} \log_2 2^{2n-2} = (2n-2)(-\frac{1}{2})^{n-1}$.

$T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})^1 + 4 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + \dots + (2n-2)(-\frac{1}{2})^{n-1}$,

$-\frac{1}{2}T_n = 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 4 \cdot (-\frac{1}{2})^3 + \dots + (2n-2)(-\frac{1}{2})^n$

两式相减得 $\frac{3}{2}T_n = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + \dots + 2 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1} - (2n-2)(-\frac{1}{2})^n$

$$= 2 \times \frac{(-\frac{1}{2}) \left[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1} \right]}{1 + \frac{1}{2}} - (2n-2) \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{2}{3} - (2n-2) \left(-\frac{1}{2} \right)^n,$$

所以 $T_n = -\frac{4}{9} \left[1 + (3n-1) \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$.

18. 【详解】(1) 由题意完成列联表如下:

	销售额不少于 50 万元	销售额不足 50 万元	合计
线上销售时间不少于 8 小时	17	13	30
线上销售时间不足 8 小时	8	12	20
合计	25	25	50

因为 $\chi^2 = \frac{50 \times (17 \times 12 - 13 \times 8)^2}{30 \times 20 \times 25 \times 25} \approx 1.33 < 3.841$, 所以不能认为赞助企业每天的销售额与每天线上销售时间有关;

(2) (i) 因为在线上销售时间不足 8 小时的赞助企业中抽取 5 家,

所以销售额不少于 50 万元的企业数为 $5 \times \frac{8}{8+12} = 2$, 和销售额不足 50 万元的企业数 $5 \times \frac{12}{8+12} = 3$;

(ii) 根据列联表可知: $X = 0, 1, 2$,

$$P(X=0) = \frac{C_{17}^2}{C_{25}^2} = \frac{34}{75}, P(X=1) = \frac{C_{17}^1 \cdot C_{8}^1}{C_{25}^2} = \frac{34}{75}, P(X=2) = \frac{C_{12}^2}{C_{25}^2} = \frac{7}{75},$$

所以 X 的分布列如下:

X	0	1	2
P	$\frac{34}{75}$	$\frac{34}{75}$	$\frac{7}{75}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{34}{75} + 1 \times \frac{34}{75} + 2 \times \frac{7}{75} = \frac{48}{75}.$$

19. 【详解】(1) 由 $(2b+c)\cos A + a\cos C = 0$ 由射影定理得 $2b\cos A + b = 0$

$$\therefore \cos A = -\frac{1}{2} \text{ 又 } A \in (0, \pi), \text{ 故 } A = \frac{2\pi}{3}, \text{ 由 } 2R = \frac{a}{\sin A} \text{ 得 } a = 4 \sin \frac{2}{3}\pi = 2\sqrt{3}$$

$$b = 2c \cdot \cos(B+C) = 2c \cdot \cos \frac{\pi}{3} = c \text{ 所以 } B = C = \frac{\pi}{6} \text{ 即 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 4 \therefore b=c=2 \text{ 综上 } a=2\sqrt{3}, b=c=2$$

$$(2) \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} = \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2\mu}{3}\overrightarrow{AC}$$

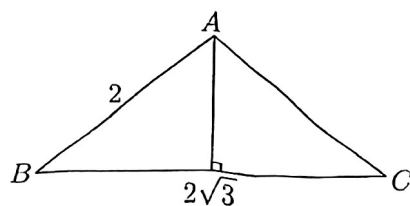
$$\because |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2, \angle BAC = 120^\circ, \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cos 120^\circ = -2$$

$$\therefore \overrightarrow{AM}^2 = \frac{4\lambda^2}{9} + \frac{16\mu^2}{9} - \frac{8\lambda\mu}{9} = \frac{4}{9}, \therefore \lambda^2 + 4\mu^2 - 2\lambda\mu = 1$$

$$\therefore (\lambda - \mu)^2 + 3\mu^2 = 1 \therefore \text{令 } \lambda - \mu = \cos \theta, \sqrt{3}\mu = \sin \theta, \therefore \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \cos \theta$$

$$\therefore \lambda^2 + \mu^2 = \frac{2}{3} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} (1 - \cos 2\theta) + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6} \sin(2\theta + \varphi), \left(\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \text{ 当 } \sin(2\theta + \varphi) = 1 \text{ 时, } (\lambda^2 + \mu^2)_{\max} = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$$



20. 【详解】(1) 如图, 取 BD 的中点 O , 连接 AO , OC , OM ,

因为 $AB = AD$, $CB = CD$, 所以 $AO \perp BD$, $OC \perp BD$,

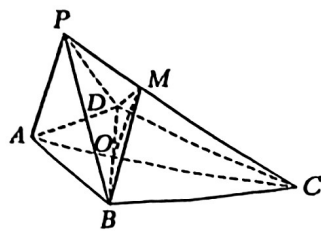
因为点 A, O, C 共面, 所以点 A, O, C 共线, 即 $AC \perp BD$,

因为 $AB = 2\sqrt{3}$ 且三角形 ABD 为等边三角形,

所以 $AO = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 3$, $OB = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3}$, 由勾股定理得: $CO = \sqrt{CB^2 - OB^2} = 6$.

所以 $\frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}$, 又 $\overline{PC} = 3\overline{PM}$, 所以 $\frac{AO}{OC} = \frac{PM}{MC}$,

所以 $PA \parallel OM$, 又 $OM \subset$ 平面 BDM , $PA \not\subset$ 平面 BDM , 所以 $PA \parallel$ 平面 BDM .



(2) 设等边三角形 ABD 的中心为 E , 连接 PE , 则 $PE \perp$ 平面 ABD ,

所以 $\angle PAE$ 是直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角.

由 (1) 可知, 点 O 为 BD 的中点, 即 AO 为 $\triangle ABD$ 的中线, 所以点 E 在 AC 上,

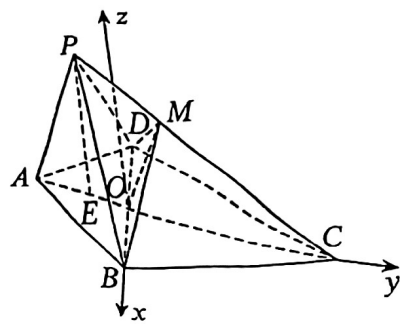
因为 $AO = 3$, 所以 $AE = 2$, 所以 $\tan \angle PAE = \frac{PE}{AE} = \frac{3}{2}$, 所以 $PE = 3$.

如图, 以 O 为原点, \overline{OB} , \overline{OC} , \overline{EP} 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

所以 $A(0, -3, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$, $D(-\sqrt{3}, 0, 0)$, $P(0, -1, 3)$,

因为 $\overline{PC} = 3\overline{PM}$, 所以 $\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} + \frac{1}{3}\overline{PC} = \left(0, \frac{4}{3}, 2\right)$, 所以 $M\left(0, \frac{4}{3}, 2\right)$.

所以 $\overline{AP} = (0, 2, 3)$, $\overline{AB} = (\sqrt{3}, 3, 0)$, $\overline{OB} = (\sqrt{3}, 0, 0)$, $\overline{OM} = \left(0, \frac{4}{3}, 2\right)$,



设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overline{AP} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (0, 2, 3) = 2y_1 + 3z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overline{AB} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (\sqrt{3}, 3, 0) = \sqrt{3}x_1 + 3y_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_1 = \sqrt{3}, \text{得 } y_1 = -1, z_1 = \frac{2}{3}, \text{所以 } \vec{m} = \left(\sqrt{3}, -1, \frac{2}{3}\right),$$

设平面 BDM 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{OB} = (x_2, y_2, z_2) \cdot (\sqrt{3}, 0, 0) = \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{OM} = (x_2, y_2, z_2) \cdot \left(0, \frac{4}{3}, 2\right) = \frac{4}{3}y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}, \text{解得 } x_2 = 0, \text{取 } y_2 = -3, \text{得 } z_2 = 2, \text{所以 } \vec{n} = (0, -3, 2),$$

设平面 PAB 与平面 BDM 所成角大小为 θ ,

$$\text{所以 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|3 + \frac{4}{3}\right|}{\sqrt{13} \times \sqrt{\frac{40}{9}}} = \frac{\sqrt{130}}{20}, \text{所以平面 } PAB \text{ 与平面 } BDM \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{130}}{20}.$$

21. 【详解】(1) 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点为 $(2\sqrt{3}, 0)$, 故双曲线 C 的右焦点为 $(2\sqrt{3}, 0)$,

双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线为 $bx \pm ay = 0$,

$$\text{依题意} \begin{cases} a^2 + b^2 = 12 \\ \frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 9 \end{cases}, \text{ 故双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

(2) ①当直线 MN 的斜率不存在时, 则可设 $M(n, y_0), N(n, -y_0)$,

$$\text{代入 } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1, \text{ 得 } y_0^2 = 3n^2 - 9, \text{ 则 } k_1 k_2 = \frac{y_0 - \sqrt{3}}{n-2} \cdot \frac{-y_0 - \sqrt{3}}{n-2} = \frac{3 - y_0^2}{(n-2)^2} = \frac{12 - 3n^2}{(n-2)^2} = 1,$$

即 $n^2 - n - 2 = 0$, 解得 $n = 2$ 或 $n = -1$, 当 $n = 2$ 时, MN 过点 $P(2, \sqrt{3})$, 不合题意;

当 $n = -1$ 时, 直线 MN 的方程为 $x = -1$, 它与双曲线 C 不相交, 不合题意.

②当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程 $y = kx + m$ 代入 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$,

整理得, $(3 - k^2)x^2 - 2kmx - (m^2 + 9) = 0$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2km}{3 - k^2}, x_1 x_2 = -\frac{m^2 + 9}{3 - k^2},$$

$$\text{由 } \Delta = (-2km)^2 - 4(3 - k^2)(m^2 + 9) > 0, \therefore m^2 + 9 > 3k^2,$$

$$\therefore k_1 k_2 = \frac{y_1 - \sqrt{3}}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2 - \sqrt{3}}{x_2 - 2} = \frac{kx_1 + m - \sqrt{3}}{x_1 - 2} \cdot \frac{kx_2 + m - \sqrt{3}}{x_2 - 2} = \frac{k^2 x_1 x_2 + k(m - \sqrt{3})(x_1 + x_2) + (m - \sqrt{3})^2}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = 1$$

所以, $(k^2 - 1)x_1 x_2 + (km - \sqrt{3}k + 2)(x_1 + x_2) + m^2 - 2\sqrt{3}m - 1 = 0$, 即

$$(k^2 - 1)\left(-\frac{m^2 + 9}{3 - k^2}\right) + (km - \sqrt{3}k + 2)\left(\frac{2km}{3 - k^2}\right) + m^2 - 2\sqrt{3}m - 1 = 0,$$

$$\text{整理得 } 4k^2 - 2mk - (2m^2 - 3\sqrt{3}m + 3) = 0 \text{ 即 } (2k - 2m + \sqrt{3})(2k + m - \sqrt{3}) = 0,$$

$$\text{所以 } 2k - 2m + \sqrt{3} = 0 \text{ 或 } 2k + m - \sqrt{3} = 0,$$

$$\text{若 } 2k - 2m + \sqrt{3} = 0, \text{ 则 } m = \frac{2k + \sqrt{3}}{2}, \text{ 直线 } AB \text{ 化为 } y = kx + \frac{2k + \sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = k(x + 1), \text{ 过定点 } \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\text{若 } 2k + m - \sqrt{3} = 0, \text{ 则 } m = \sqrt{3} - 2k, \text{ 直线 } AB \text{ 化为 } y = kx + \sqrt{3} - 2k,$$

$$\text{即 } y - \sqrt{3} = k(x - 2), \text{ 它过点 } P(2, \sqrt{3}), \text{ 舍去.}$$

综上, 直线 AB 恒过定点 $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

22. 【详解】(1) 因为 $f(x) = \ln x - (a-1)x + 1$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - (a-1) (x > 0)$,

当 $a-1 \leq 0$, 即 $a \leq 1$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为单调递增函数, 不可能有极值, 舍去;

当 $a-1 > 0$, 即 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a-1}$,

当 $0 < x < \frac{1}{a-1}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{a-1}$ 时, $f'(x) < 0$;

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a-1})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a-1}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a-1}$ 取得极大值, 符合题意;

综上: $a > 1$, 故实数 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

(2) 当 $a = 2$ 时, $g(x) = \ln x - x + 1 + \sin x (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 + \cos x$,

令 $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + \cos x (x > 0)$, 则 $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \sin x$,

(i) 当 $x \in (0, \pi]$ 时, $h'(x) < 0$, 则 $h(x)$ 单调递减, 即 $g'(x)$ 单调递减,

注意到 $g'(1) = \cos 1 > 0$, $g'(\pi) = \frac{1}{\pi} - 2 < 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in (1, \pi)$ 使 $g'(x_0) = 0$,

且当 $0 < x < x_0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x_0 < x \leq \pi$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

注意到 $g\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2 - \frac{1}{e^2} + 1 + \sin \frac{1}{e^2} < 0$, $g(1) = \sin 1 > 0$, $\ln \pi < \ln e^2 = 2 < \pi - 1$, 则 $g(\pi) = \ln \pi - \pi + 1 < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$ 和 $(1, \pi)$ 上各有一个零点;

(ii) 当 $x \in (\pi, 2\pi]$ 时, $\sin x \leq 0$, 故 $g(x) \leq \ln x - x + 1$,

令 $\varphi(x) = \ln x - x + 1 (\pi < x \leq 2\pi)$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(\pi, 2\pi]$ 上单调递减, 故 $\varphi(x) < \varphi(\pi) = \ln \pi - \pi + 1 < 0$,

所以 $g(x) \leq \varphi(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(\pi, 2\pi]$ 上无零点;

(iii) 当 $x \in (2\pi, +\infty)$ 时, $\sin x \leq 1$, 则 $g(x) \leq \ln x - x + 2$,

令 $m(x) = \ln x - x + 2 (x > 2\pi)$, 则 $m'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(2\pi, +\infty)$ 上单调递减,

又 $\ln 2\pi < \ln e^3 = 3 < 2\pi - 2$, 故 $m(x) < m(2\pi) = \ln 2\pi - 2\pi + 2 < 0$,

所以 $g(x) \leq m(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(2\pi, +\infty)$ 上无零点;

综上: $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$ 和 $(1, \pi)$ 上各有一个零点, 共有两个零点.