

# 高 2024 届高二下期末模拟考试

## 数 学 试 题

(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

命题学校: 重庆市育才中学  
2023 年 6 月

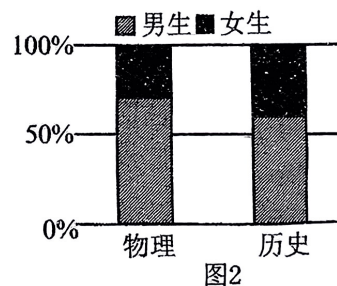
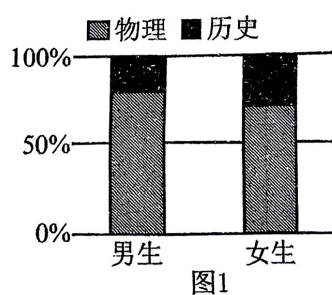
### 注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生保存, 以备评讲)。

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集为  $U$ , 若  $A \cap (C_U B) = \emptyset$ , 则  $A \cup B = ( )$   
A.  $A$                       B.  $B$                       C.  $C_U A$                       D.  $C_U B$
2. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则 “ $\frac{x-5}{x+2} < 0$ ” 是 “ $|x-2| < 1$ ” 的 ( )  
A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件    C. 充要条件    D. 既不充分又不必要条件
3. 在一组样本数据  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) (n \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 不全相等})$  的散点图中, 若所有样本点  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$  都在直线  $y = \frac{1}{2}x + 1$  上, 则这组样本数据的样本相关系数为 ( )  
A.  $-1$                       B.  $0$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $1$

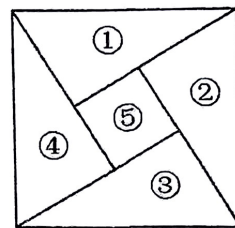
4. 四川省将从 2022 年秋季入学的高一年级学生开始实行高考综合改革, 高考采用“3+1+2”模式, 其中“1”为首选科目, 即物理与历史二选一。某校为了解学生的首选意愿, 对部分高一学生进行了抽样调查, 制作出



如下两个等高条形图, 根据条形图信息, 下列结论正确的是 ( )

- A. 样本中选择物理意愿的男生人数少于选择历史意愿的女生人数
- B. 样本中女生选择历史意愿的人数多于男生选择历史意愿的人数
- C. 样本中选择物理学科的人数较多
- D. 样本中男生人数少于女生人数

5. 三国时期数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅如图所示的“弦图”，后人称之为“赵爽弦图”，它由四个全等的直角三角形和一个正方形构成.现对该图进行涂色，有 5 种不同的颜色提供选择，相邻区域所涂颜色不同.在所有的涂色方案中随机选择一种方案，该方案恰好只用到三种颜色的概率是（ ）



- A.  $\frac{3}{20}$       B.  $\frac{1}{7}$       C.  $\frac{1}{6}$       D.  $\frac{1}{5}$
6. 若  $(2x-3)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + a_5(x-1)^5$ ，则  $a_0 + a_2 + a_4 =$ （ ）  
A. 244      B. 1      C. -120      D. -121
7. 《数术记遗》是《算经十书》中的一部，相传是汉末徐岳所著，该书记述了我国古代 14 种算法，分别是：积算（即筹算）、太乙算、两仪算、三才算、五行算、八卦算、九宫算、运筹算、了知算、成数算、把头算、龟算、珠算和计数.某学习小组有甲、乙、丙、丁四人，该小组要收集九宫算、运筹算、了知算、成数算、把头算、珠算 6 种算法的相关资料，要求每种算法只能一人收集，每人至少收集其中一种，则不同的分配方案种数有（ ）  
A. 1560 种      B. 2160 种      C. 2640 种      D. 4140 种
8. 偶函数  $f(x)$  定义域为  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，其导函数是  $f'(x)$ .当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时，有  $f'(x)\cos x + f(x)\sin x < 0$ ，则关于  $x$  的不等式  $f(x) > \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x$  的解集为（ ）  
A.  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$       B.  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$       C.  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$       D.  $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

**二、多项选择题：**本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知  $a < b < 0$ ， $c < d < 0$ ，则下列不等式一定成立的是（ ）  
A.  $a+c < b+d$       B.  $ac > bd$       C.  $\frac{d}{a} > \frac{c}{a}$       D.  $a^2 > ab > b^2$
10. 下列命题中正确的是（ ）  
A. 命题  $p: \exists x_0 \in [1, +\infty), e^{x_0} \geq x_0 + 1$  的否定是:  $\forall x \in [1, +\infty), e^x < x + 1$   
B. 比较两个模型的拟合效果，可以比较残差平方和的大小，残差平方和越小的模型拟合效果越好  
C. 已知随机变量  $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ ，若  $D(3X-2) = 12$ ，则  $n = 4$   
D. “事件 A 与事件 B 相互独立”是“事件  $\bar{A}$  与事件 B 相互独立”的充要条件

11. 已知  $x, y > 0, x + 2y + xy - 6 = 0$ , 则 ( )

A.  $xy$  的最大值为  $\sqrt{2}$

B.  $x + 2y$  的最小值为 4

C.  $x + y$  的最小值为  $4\sqrt{2} - 3$

D.  $(x + 2)^2 + (y + 1)^2$  的最小值为 16

12. 已知  $ab \neq 0$ , 函数  $f(x) = e^{ax} + x^2 + bx$ , 则 ( )

A. 对任意  $a, b$ ,  $f(x)$  存在唯一极值点

B. 对任意  $a, b$ , 曲线  $y = f(x)$  过原点的切线有两条

C. 当  $a + b = -2$  时,  $f(x)$  存在零点

D. 当  $a + b > 0$  时,  $f(|x|)$  的最小值为 1

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 二项式  $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$  展开式中常数项是\_\_\_\_\_ (填数字)

14. 2023 年国家公务员考试笔试于 1 月 8 日结束，公共科目包括行政职业能力测验和申论两科，

满分均为 100 分，行政职业能力测验中，考生成绩  $X$  服从正态分布  $N(80, \sigma^2)$ 。若

$P(75 \leq x \leq 85) = \frac{1}{5}$ ，则从参加这次考试的考生中任意选取 3 名考生，恰有 2 名考生的成绩

高于 85 的概率为\_\_\_\_\_。

15. 中国空间站的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱。假设中国空间站要安

排甲，乙，丙，丁，戊 5 名航天员开展实验，其中天和核心舱安排 3 人，问天实验舱与梦

天实验舱各安排 1 人。若甲、乙两人不能同时在一个舱内做实验，则不同的安排方案共有

\_\_\_\_\_种

16. 第 24 届冬奥会于 2022 年 2 月 4 日至 20 日在北京和张家口举行，中国邮政陆续发行了多款

纪念邮票，其图案包括“冬梦”、“冰墩墩”、“雪容融”等。小王有 3 张“冬梦”，2 张“冰

墩墩”和 2 张“雪容融”邮票；小李有“冬梦”、“冰墩墩”、“雪容融”邮票各 1 张。小王

现随机取出一张邮票送给小李，分别以  $A_1, A_2, A_3$  表示小王取出的是“冬梦”、“冰墩墩”

和“雪容融”的事件；小李再随机取出一张邮票，以  $B$  表示他取出的邮票是“冰墩墩”的

事件，则  $P(B|A_2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知函数  $f(x) = ax + b + \cos x$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )，若  $f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = \frac{1}{2}x + 2$ 。

(1) 求  $f(x)$  的解析式；

(2) 求函数  $f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上的极值。

18. 孔子曰：温故而知新，可以为师矣。数学学科的学习也是如此，为了调查“数学成绩是否优秀”与“是否及时复习”之间的关系，某校志愿者从高二年级的所有学生中随机抽取 60 名学生进行问卷调查，得到如下样本数据：

	数学成绩优秀（人数）	数学成绩不优秀（人数）
及时复习（人数）	25	5
不及时复习（人数）	10	20

(1) 试根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验，能否认为“数学成绩优秀”与“及时复习”有关系？

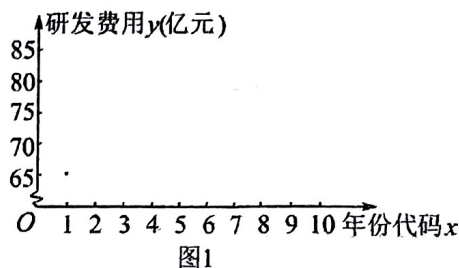
(2) 在该样本中，用分层抽样的方法从数学成绩优秀的学生中抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 3 人。设抽取 3 人中及时复习的人数为  $X$ ，求  $X$  的分布列与数学期望。

临界值参考表：

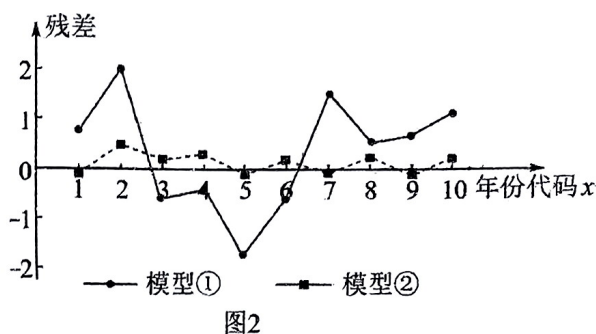
$P(\chi^2 \geq x_\alpha)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
$x_\alpha$	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中  $n = a+b+c+d$ )

19. 党的二十大报告提出,从现在起,中国共产党的中心任务就是团结带领全国各族人民全面建成社会主义现代化强国、实现第二个百年奋斗目标,以中国式现代化全面推进中华民族伟大复兴.高质量发展是全面建设社会主义现代化国家的首要任务.加快实现高水平科技自立自强,才能为高质量发展注入强大动能.某科技公司积极响应,加大高科技研发投入,现对近十年来高科技研发投入情况分机调研,其研发投入 $y$ (单位:亿元)的统计图如图1所示,其中年份代码 $x=1、2、\dots、10$ 分别指2013年、2014年、...、2022年.



现用两种模型① $y = bx + a$ , ② $y = c + d\sqrt{x}$ 分别进行拟合,由此得到相应的回归方程,并进行残差分析,得到图2所示的残差图.结合数据,计算得到如下值:



$\bar{y}$	$\bar{t}$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$	$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})$
75	2.25	82.5	4.5	120	28.67

表中 $t_i = \sqrt{x_i}$ ,  $\bar{t} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_i$

(1) 根据残差图,比较模型①、②的拟合效果,应选择哪个模型?并说明理由;

根据(1)中所选模型,求出 $y$ 关于 $x$ 的回归方程;根据所选模型,求该公司2028年高科技研发投入 $y$ 的预报值.(回归系数精确到0.01).

附:对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ,其回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 的斜率和截距的最小

二乘估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ .

20. 已知函数  $f(x) = \ln x - x - 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - ax$  ( $a > 0$ ).

(1) 判断  $f(x)$  的零点个数, 并说明理由;

(2) 若对任意的  $x_1 \in (1, e)$ , 总存在  $x_2 \in (1, e)$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立, 求  $a$  的取值范围.

21. 第 56 届世界乒乓球锦标赛将于 2022 年在中国成都举办, 国球运动又一次掀起热潮. 现有甲乙两人进行乒乓球比赛, 比赛采用 7 局 4 胜制, 每局为 11 分制, 每赢一球得 1 分.

(1) 已知某局比赛中双方比分为 8:8, 此时甲先连续发球 2 次, 然后乙连续发球 2 次, 甲发球时甲得分的概率为  $\frac{3}{5}$ , 乙发球时乙得分的概率为  $\frac{1}{2}$ , 各球的结果相互独立, 求该局比赛甲以 11:9 获胜的概率;

(2) 已知在本场比赛中, 前两局甲获胜, 在后续比赛中, 每局比赛甲获胜的概率为  $\frac{4}{5}$ , 乙获胜的概率为  $\frac{1}{3}$ , 且每局比赛的结果相互独立. 两人又进行了  $X$  局后比赛结束, 求  $X$  的分布列与数学期望.

22. 已知函数  $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - ax$ , 函数  $g(x) = \frac{\ln 2x}{x} + \frac{ae^{-x}}{2x^2} - 2ae^x + 1$

(1) 当  $a > 0$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 已知  $a \geq \frac{1}{2}$ ,  $e^x > \frac{1}{2x}$ , 求证:  $g(x) < 0$ ;

(3) 已知  $n$  为正整数, 求证:  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \ln 2$ .