

# 2023 年名校联盟诊断性测试

## 数 学

(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

2023 年 2 月

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生保存, 以备评讲)。

一、单选题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

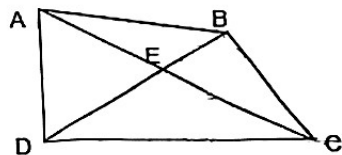
1. 若  $2^a = 5^b = \frac{1}{10}$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$  ( )  
A.  $\lg 7$                       B.  $\log_7 10$                       C. 1                      D. -1
2. 已知命题  $P: \forall x > 0, \frac{x^2 + x + 4}{x} > a$ . 若命题  $P$  是假命题, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
A.  $a < 5$                       B.  $a < 6$                       C.  $a \geq 5$                       D.  $a \geq 6$

3. 已知各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4, a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 8$ , 则  $S_{16} =$  ( )  
A. 60                      B. 32                      C. 15                      D. 20

4. 已知圆台的上、下底面中心分别为  $O_1, O_2$ , 过直线  $O_1O_2$  的截面是上、下底边边长分别为 2 和 4, 且高为  $\sqrt{3}$  的等腰梯形, 则该圆台的侧面积是 ( )  
A.  $3\pi$                       B.  $3\sqrt{3}\pi$                       C.  $6\pi$                       D.  $6\sqrt{3}\pi$

5. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $|\overline{AC}| = 4, |\overline{AD}| = 2, \angle CAD = 60^\circ, E$  为线段  $AC$  中点,  $\overline{DE} = 2\overline{EB}$ , 则  $\overline{DB} \cdot \overline{DC} =$  ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- B. 15
- C. 18
- D. 9



6. 一医疗团队为研究治疗某种疾病的新药能否有助于 7 天内治愈该疾病病人, 在已患病的 500 例病人中, 随机分为两组, 实验组服用该新药, 对照组不服用该药, 在其他治疗措施相同的情况下, 统计 7 天内痊愈病例数, 得到如下数据:

	7 天内未痊愈	7 天内痊愈
对照组	30	170
实验组	20	280

根据表格数据, 下列结论正确的是 ( )

参考公式及数据:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a+b+c+d$ .

$\alpha$	0.10	0.010	0.001
$x_\alpha$	2.706	6.635	10.828

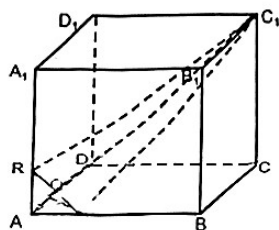
- A. 在犯错误的概率不大于 0.01 的前提下, 可以认为服用该新药与 7 天内治愈病人无关  
 B. 在犯错误的概率不大于 0.001 的前提下, 可以认为服用该新药与 7 天内治愈病人无关  
 C. 根据小概率值  $\alpha = 0.01$  的独立性检验, 可以推断服用该新药与 7 天内治愈病人有关  
 D. 根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验, 可以推断服用该新药与 7 天内治愈病人有关

7. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足: ①  $f(2x+1)+2$  是奇函数; ②  $y=f(x)$  与  $y=x-3$  有且仅有三个不同的公共点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ , 则  $x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3 =$  ( )

- A. -3                      B. -6                      C. 3                      D. 6

8. 如图所示, 棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P, Q, R$  分别是棱  $AB, AD, AA_1$  上的动点, 且  $AP=AQ=AR$ , 则三棱锥  $C_1-PQR$  体积的最大值为 ( )

- A.  $\frac{5}{48}$                       B.  $\frac{1}{6}$   
 C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{2}{3}$



二、多选题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数  $z_1 = 2i, z_2 = 2-i$  ( $i$  为虚数单位), 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $z_1$  是纯虚数                      B.  $\overline{z_2} = 2+i$   
 C.  $\frac{z_1}{z_2}$  的虚部为  $\frac{4}{5}i$                       D.  $\frac{z_1}{z_2}$  在复平面内对应的点位于第四象限

10. 已知圆  $O_1: x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$  与  $O_2: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$  交于  $M, N$  两点,  $P$  是圆  $O_2$  上的一动点, 则 ( )

- A. 直线  $MN$  的方程是  $x-2y-1=0$                       B. 线段  $MN$  中垂线方程为  $2x+y-2=0$   
 C. 线段  $MN$  的长度是                      D. 点  $P$  到直线  $MN$  的距离的最大值为  $5+2\sqrt{5}$

11. 某人买一辆 15 万元的新车, 购买当天支付 3 万元首付, 剩余向银行贷款, 月利率 0.3%  
分 12 个月还清 (每月购买车的那一天分期还款). 有两种金融方案: 等额本金还款, 将本金平均分配到每一期进行偿还, 每一期所还款金额由两部分组成, 一部分为每期本金, 即贷款本金除以还款期数, 另一部分是利息, 即贷款本金与已还本金总额的差乘以利率; 等额本息还款, 每一期偿还同等数额的本息和, 利息以复利计算. 下列说法正确的是 ( )

(参考:  $1.003^{11} \approx 1.0335, 1.003^{12} \approx 1.0366$ ; 计算结果精确到分)

- A. 等额本息方案, 每月还款金额为 10196.07 元  
B. 等额本金方案, 最后一个月还款金额为 10030 元  
C. 等额本金方案, 所有的利息和为 2340 元  
D. 等额本金方案比等额本息方案还款利息更少, 所以等额本金方案优于等额本息方案

12. 设  $a = e^{0.1} - 1, b = \ln 1.1, c = \frac{2}{21}, d = \sin 0.1$ , 则 ( )

- A.  $b < a$                       B.  $b < c$                       C.  $b < d$                       D.  $d < a$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 第 16 题第一空 2 分, 第二空 3 分, 共 20 分.

13.  $(1+2x)(1+x)^3$  的展开式中  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_.

14. 已知点  $P(3, 4)$  是角  $\alpha$  的终边上一点, 则  $\tan \frac{\alpha}{2} =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点和上顶点分别为  $F$  和  $A$ , 连接  $AF$  并延长交椭圆  $C$  于  $B$ , 若  $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOF}} = \frac{3}{2}$ , 则椭圆  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

16. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $b = a \cos C - \frac{1}{2}c$ ,  $D$  是边  $BC$  上的点,  $AD = BD = 2, CD = 3$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_,  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 将函数  $g(x) = 4 \sin x \cos(x + \frac{\pi}{6})$  的图象向右平移  $\varphi$  个单位得到  $f(x)$  的图象, 其中  $0 < \varphi < \pi$ .

(1) 求  $g(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的值域;

(2) 若  $f(x) \leq f(0)$  对  $x \in R$  恒成立, 求  $\varphi$  的值.

18. (12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$ ,  $a_n = 1 + \frac{1}{2n-9}$ , 若  $\{a_n\}$  的最大项和最小项分别是

$\{b_n\}$  中的  $b_2 - 1$  和  $b_3 - 9$  的值.

(1) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $c_n = \frac{1}{a_n - 1} \cdot b_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

19. (12 分) 某综艺节目, 5 位嘉宾轮流参与抽奖. 四个一模一样的箱子, 只有一个箱子有奖品. 抽奖规则为主持人请嘉宾在四个箱子中选择一个, 若奖品在此箱子里, 则奖品由嘉宾获得. 前一位嘉宾抽奖结束后, 主持人重新布置箱子, 邀请下一位嘉宾抽奖.

(1) 记  $X$  为 5 位嘉宾中的中奖人数, 求  $X$  的分布列, 均值和方差;

(2) 主持人宣布游戏升级, 新的抽奖规则是: 当嘉宾选好一个箱子后, 主持人 (他知道哪个箱子有奖品) 会打开一个嘉宾没有选择的空箱子给嘉宾看, 此后嘉宾可以选择换一个箱子或者不换. 嘉宾做出选择后, 主持人再打开嘉宾最终选中的箱子, 揭晓嘉宾是否中奖. 嘉宾的哪种决策会有更大可能抽中奖品? 请说明理由.

20. (12 分) 已知抛物线  $E: y^2 = 2px (p > 0)$  与双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$  的渐近线在第一象限的交点为  $Q$ , 且  $Q$  点的横坐标为 3.

(1) 求抛物线  $E$  的方程;

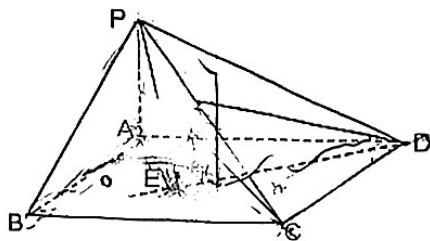
(2) 过点  $M(-3, 0)$  的直线  $l$  与抛物线  $E$  相交于  $A, B$  两点,  $B$  关于  $x$  轴的对称点为  $B'$ , 求证: 直线  $AB'$  必过定点.

21. (12 分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  是菱形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $PA = \frac{1}{2} AB = 1$ ,  $E, F$  分别是线段  $BD$  和  $PC$  上的动点, 且  $\frac{BE}{BD} = \frac{PF}{PC} = \lambda (0 < \lambda \leq 1)$ .

(1) 求证:  $EF \parallel$  平面  $PAB$ ;

(2) 求直线  $DF$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值的最大值;

(3) 若直线  $AE$  与线段  $BC$  交于  $M$  点,  $AH \perp PM$  于点  $H$ , 求线段  $CH$  长的最小值.



22. (12 分) 已知函数  $f(x) = e^x - mx - \cos x, x \in \mathbb{R}$ .

(1) 若  $f(x)$  在  $x = 0$  处的切线方程为  $y = x$ , 求  $m$  的值;

(2) 当  $m = 2$  时, 求证:  $f(x)$  有且仅有两个零点;

(3) 若  $x \geq 0$  时, 恒有  $f(x) \geq 0$ , 求  $m$  的取值范围.