

数学试题

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

本试卷为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。

注意事项：1. 作答前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在试卷的规定位置上。

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效。

3. 考试结束后，答题卡、试卷、草稿纸一并收回。

第 I 卷

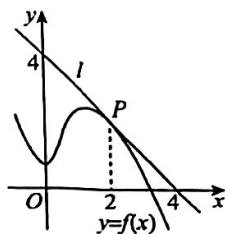
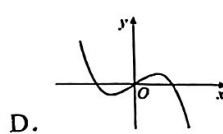
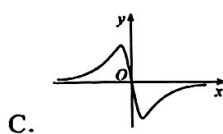
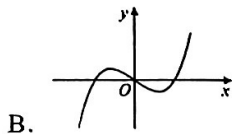
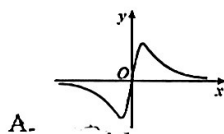
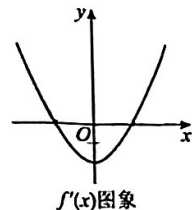
一. 选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 1，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0 + 2\Delta x)}{\Delta x} =$

- A. 2 B. 3 C. -2 D. -3

2. 如图，已知函数 $f(x)$ 的图像在点 $P(2, f(2))$ 处的切线为 l ，则 $f(2) + f'(2) =$

- A. -3 B. -2
C. 2 D. 1

3. $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数， $f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的图象可能为4. 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x=1$ 处有极值为 10，那么 a, b 的值为

- A. 4, -11 B. -3, 3 C. 4, -11 或 -3, 3 D. 3, 3

5. 若函数 $f(x) = a \ln x - x + 1$ 在 $x \in [e, e^2]$ 内存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是

- A. $(e, +\infty)$ B. $(-\infty, e)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. $(-\infty, e^2)$

6. 已知 $f(x)$ 是奇函数并且是 \mathbf{R} 上的单调函数，若函数 $y = f(x^3 + 6x^2 + 1) + f(9x - \lambda)$ 有 3 个零点，则实数 λ 的取值范围

- A. $(-3, 1)$ B. $(1, 28)$ C. $[1, 28]$ D. $[-1, 1]$

7. 若动点 P 在直线 $y = x + 1$ 上，动点 Q 在曲线 $x^2 = -2y$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{8}$

8. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $3f(x) + f'(x) < 0$ ， $f(\ln 2) = 1$ ，则不等式 $f(x)e^{3x} > 8$ 的解集为

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, \ln 2)$ C. $(\ln 2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

二. 选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列求导运算正确的是

A. $(\ln 7)' = \frac{1}{7}$

B. $[(x^2 + 2)\sin x]' = 2x\sin x + (x^2 + 2)\cos x$

C. $\left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{2x - x^2}{e^x}$

D. $[\ln(3x + 2)]' = \frac{1}{3x + 2}$

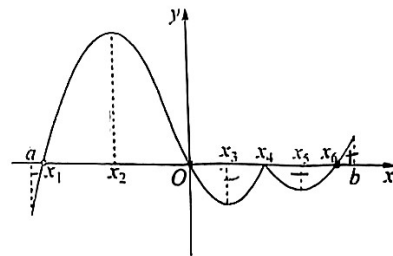
10. 已知函数 $y = f(x), x \in [a, b]$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则

A. $f(x)$ 在 $(x_2, 0)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 有 4 个极值点

C. $f(x)$ 在 (x_3, x_4) 上单调递减

D. $f(x_3) < f(x_5)$



11. 定义: 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导数, 若方程 $f''(x) = 0$ 有实数解 x_0 , 则称点 $(x_0, f(x_0))$

为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”. 经过探究发现: 任何一个三次函数都有“拐点”且“拐点”就是三次函数图像的对称中心.

已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{5}{3} (ab \neq 0)$ 的对称中心为 $(1, 1)$, 则下列说法中正确的有

A. $a = \frac{1}{3}, b = -1$

B. 函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值

C. 函数 $f(x)$ 有三个零点

D. 过 $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 可以作三条直线与 $y = f(x)$ 图像相切

12. 已知函数 $f(x) = \frac{mx+n}{x^2+1}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}$, $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 在曲线

$g(x) = f(x) + \ln(x-1) (x > 1)$ 上, 且顶点 B 的位置在顶点 A 和 C 之间, 则以下结论中正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

B. 函数 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增

C. $\triangle ABC$ 不可能是钝角三角形

D. $g(e^{\sin^2 B}) > g(e^{\sin^2 A + \sin^2 C})$

第 II 卷

三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 f'(1)$, 则 $f(2) =$ _____.

14. 已知曲线 $f(x) = 2x^3 - 3x$, 过点 $M(0, 32)$ 作曲线的切线, 则切线的方程为 _____.

15. 若函数 $f(x) = e^x(-x^2 + 2x + a)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上存在最大值, 则实数 a 的取值范围为 _____.

16. 若对任意的 $x_1, x_2 \in (m, +\infty)$, 且当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{3}{x_1 x_2}$, 则 m 的最小值是 _____.

四. 解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值.

18. (12 分)

已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20, a_3 = 8$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求 $a_1 a_2 - a_2 a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_n a_{n+1}$.

19. (12 分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^+$.

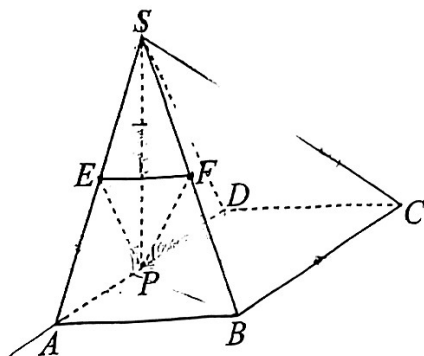
- (1) 证明: 数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 是等差数列;
- (2) 设 $b_n = 3^n \cdot \sqrt{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (12 分)

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形， $\triangle SAD$ 是等边三角形，平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB=1$ ， P 为棱 AD 的中点，四棱锥 $S-ABCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

(1) 若 E 为棱 SA 的中点， F 为棱 SB 的中点，求证：平面 $PEF \parallel$ 平面 SCD 。

(2) 在棱 SA 上是否存在点 M ，使得平面 PMB 与平面 SAD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$ ？若存在，指出点 M 的位置；若不存在，请说明理由。



21. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$

(1) 求 $f(x)$ 的极值；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。

22. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 一个顶点 $A(0, -2)$ ，以椭圆 E 的四个顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 过点 $P(0, -3)$ 的直线 l 斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C ，直线 AB, AC 分别与直线 $y = -3$ 交于点 M, N ，当 $|PM| + |PN| \leq 15$ 时，求 k 的取值范围。