复习题参考答案

第一章　集合与常用逻辑用语、不等式

1．D

【详解】因为 $A\otimes B=\left\{x\mid x=\dfrac{m}{n},m\in A,n\in B\right\}$, 且 $A=\{1,2,4\},B=\{2,4,8\}$，

当 $m=1$ 时，n 可能为 $2,4,8$，此时 x 的取值为：$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}$；

当 $m=2$ 时，n 可能为 $2,4,8$，此时 x 的取值为：$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}$；

当 $m=4$ 时，n 可能为 $2,4,8$，此时 x 的取值为：$2,1,\dfrac{1}{2}$；

综上可知：$A\otimes B=\{\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},1,2\}$，所以集合 $A\otimes B$ 中元素个数为 5，

2．D

【详解】对于 A，取 $a=-1,b=-\dfrac{1}{2}$，则 $a+\dfrac{1}{a}=-1-\dfrac{1}{1}=-2,b+\dfrac{1}{b}=-2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$，因为 $-2>-\dfrac{5}{2}$，故 A 错误，

对于 B，因为 $a<b<0$，所以 $b^2<a^2$，又因为 $m<0$，所以 $mb^2>ma^2$，故 B 错误，

对于 C，取 $a=m=-2,b=-1$，则 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}<\dfrac{b+m}{a+m}=\dfrac{-3}{-4}=\dfrac{3}{4}$，故 C 错误，

对于 D，$\dfrac{2a+b}{a+2b}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{2ab+b^2-a^2-2ab}{(a+2b)b}=\dfrac{b^2-a^2}{(a+2b)b}$，因为 $a<b<0$，所以 $a^2>b^2$，即 $b^2-a^2<0$，又 $(a+2b)b>0$，

所以 $\dfrac{2a+b}{a+2b}-\dfrac{a}{b}<0$，故 D 正确，

3．C

【详解】不等式的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)\cup(-1,+\infty)\left(\dfrac{1}{a}<-1\right)$，则 $\begin{cases}a<0\\ \dfrac{1}{a}<-1\end{cases}$，得

$-1<a<0$，所以命题的必要不充分条件表示的集合需真包含 $\{a|-1<a<0\}$，所以 $-2<a<0$ 是其必要不充分条件.

4．A

【详解】$\because B\subseteq A$，$\therefore$①当 $B=\varnothing$ 时，即 $ax+1\le 0$ 无解，此时 $a=0$，满足题意；

②当 $B\neq\varnothing$ 时，即 $ax+1\le 0$ 有解

当 $a>0$ 时，可得 $x\le -\dfrac{1}{a}$，要使 $B\subseteq A$，则需要 $\begin{cases}a>0\\ -\dfrac{1}{a}<-1\end{cases}$，解得 $0<a<1$

当 $a<0$ 时，可得 $x\ge -\dfrac{1}{a}$，要使 $B\subseteq A$，则需要 $\begin{cases}a<0\\ -\dfrac{1}{a}\ge 3\end{cases}$，解得 $-\dfrac{1}{3}\le a<0$

综上，实数 a 的取值范围是 $\left\{a\middle|-\dfrac{1}{3}\le a<1\right\}$

5．A

【详解】设 $y-1=b, 2x-1=a$，则 $y=b+1(b>0), x=\frac{1}{2}(a+1)(a>0)$

所以 $\frac{4x^2}{y-1}+\frac{y^2}{2x-1}=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq 2\frac{(a+1)(b+1)}{\sqrt{ab}}=2\frac{ab+(a+b)+1}{\sqrt{ab}}$

$=2\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)\geq 2\left(2\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\right)=2\cdot(2+2)=8$

当且仅当 $a=b=1$ 即 $x=2, y=1$ 时取等号

所以 $\frac{4x^2}{y-1}+\frac{y^2}{2x-1}$ 的最小值是 8，则 m 的最大值为 8.

6．BCD

【详解】A：解不等式 $\frac{1}{a}<1$ 可得：$a>1$ 或 $a<0$，所以“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件，故 A 不正确，

B：因为命题“任意 $x\in\mathbf{R}$，则 $x^2+x+1<0$”为全称命题，所以其否定为特称命题，

即为“存在 $x\in\mathbf{R}$，则 $x^2+x+1\geq 0$”，故 B 正确，

C：由 $2^x\geq 32$，得 $x\geqslant 5$，所以“$x\geq 6$”是“$2^x\geq 32$”的充分不必要条件，故 C 正确，

D：当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，$ab=0$，故充分性不成立，

当 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，必要性成立，则 D 正确，

7．AB

【详解】对于 A，$y=x^2+\frac{4}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{4}{x^2}}=4$，

当且仅当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时等号成立，

$y_{\min}=4$，故 A 正确；

对于 B，$y=\frac{1}{x-1}+x-1+2\geq 2+2=4$，

当且仅当 $x-1=1$ 即 $x=2$ 时等号成立，

故 B 正确；

对于 C，$y=\frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+6}}=\frac{(x^2+6)+4}{\sqrt{x^2+6}}=\sqrt{x^2+6}+\frac{4}{\sqrt{x^2+6}}\geq 4$，

因为 $x^2+6=4$ 无解，故等号不成立，故 $y_{\min}$ 不是 4，

故 C 错误.

对于 D，$y=x+\frac{9}{x}-2$，取 $x=-1$，则 $y=-12<4$，

故 D 不正确.

8．ACD

【详解】对于 A，由基本不等式，有$0 = x + y + xy - 3 \geq 2\sqrt{xy} + \left(\sqrt{xy}\right)^2 - 3$，当且仅当$x = y$时取等号.解不等式$2\sqrt{xy} + \left(\sqrt{xy}\right)^2 - 3 \leq 0$，注意到$x > 0$，$y > 0$，

则$0 < \sqrt{xy} \leq 1 \Rightarrow 0 < xy \leq 1$，当$x = y = 1$时取最大值 1.故 A 正确.

对于 B，由基本不等式$x + y \geq 2\sqrt{xy}$，可得$xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$，两不等式均当且仅当$x = y$时取等号.则

$0 = x + y + xy - 3 \leq x + y + \dfrac{(x+y)^2}{4} - 3$，当且仅当$x = y$时取等号，解不等式$x + y + \dfrac{(x+y)^2}{4} - 3 \geq 0$，注意到$x > 0$，$y > 0$，

得$x + y \geq 2$，此时$x = y = 1$.又$x > 0$，$y > 0$，故$xy > 0$，

则$x + y + xy - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 3 - xy < 3$.综上$x + y \in [2, 3)$.故 B 错误.

对于 C，因$x > 0$，$y > 0$，$x + y + xy - 3 = 0$，

则$x + y + xy - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 - (x+1)y < 3$，则$0 < x < 3$.

又由$x + y + xy - 3 = 0$，可得$(x + 1)y = 3 - x \Rightarrow y = \dfrac{3 - x}{x + 1}$.

故$x + 4y = x + \dfrac{12 - 4x}{x+1} = x + \dfrac{16 - 4(x+1)}{x+1} = x + 1 + \dfrac{16}{x+1} - 5 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \dfrac{16}{x+1}} - 5 = 3$，

当且仅当$x + 1 = \dfrac{16}{x+1}$，即$x = 3$或$x = -5$时取等号.因$0 < x < 3$，故取不到等号.

则$x + 4y > 3$.故 C 正确.

对于 D，由 C 分析可知：$x + 2y = x + \dfrac{6 - 2x}{x+1} = x + \dfrac{8 - 2(x+1)}{x+1} = x + 1 + \dfrac{8}{x+1} - 3 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \dfrac{8}{x+1}} - 3 = 4\sqrt{2} - 3$

当且仅当$x + 1 = \dfrac{8}{x+1}$，即$x = 2\sqrt{2} - 1$时取等号.得$x + 2y$的最小值是$4\sqrt{2} - 3$.故 D 正确.

9．-1或-3

【详解】解：因为$A \cap B = \{2\}$，

所以$a^2 + a - 4 = 2$或$a^2 + 1 = 2$，解得$a = -3$或2或± 1，

当$a = -3$时，$A = \{2,3,-5\}, B = \{2,10\}$，符合题意，

当$a = 2$时，$A = \{2,3,5\}, B = \{2,5\}$，不符题意，

当$a = 1$时，$A = \{2,3,3\}$，舍去，

当$a = -1$时，$A = \{2,3,-1\}, B = \{-4,2\}$，符合题意，

所以$a = -1$或-3.

10．乙

【详解】设每次购买时商品的价格分别为x元/公斤、y元/公斤$\left(x,y>0\right)$，

则甲的平均价格为：$\frac{ax+ay}{2a}=\frac{x+y}{2}$；乙的平均价格为：$\frac{2b}{\frac{b}{x}+\frac{b}{y}}=\frac{2xy}{x+y}$，

因为$x,y>0$，所以$\frac{x+y}{2}\geq\frac{2\sqrt{xy}}{2}=\sqrt{xy}$；$\frac{2xy}{x+y}\leqslant\frac{2xy}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{xy}$，

（当且仅当$x=y$时取“=”号），

所以$\frac{x+y}{2}\geq\frac{2xy}{x+y}$（当且仅当$x=y$时取“=”号），故乙的平均价格更低，

故答案为：乙.

11．　4　$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

【详解】空1方法一，由$2a+b=2$得$4a^2+4ab+b^2=4$，$4a^2+b^2=4-4ab$，

$\left(4a^2+1\right)\cdot\left(b^2+1\right)=4a^2b^2+4a^2+b^2+1=4a^2b^2-4ab+5=4\left(ab-\frac{1}{2}\right)^2+4$，

当$ab=\frac{1}{2}$且$2a+b=2$时，即$a=\frac{1}{2}$，$b=1$时，$\left(4a^2+1\right)\cdot\left(b^2+1\right)$取得最小值4.

空1方法二，由柯西不等式得

$\left(4a^2+1\right)\cdot\left(b^2+1\right)=\left(4a^2+1\right)\cdot\left(1+b^2\right)\geq\left(2a+b\right)^2=4.$

当$a=\frac{1}{2}$，$b=1$时，$\left(4a^2+1\right)\cdot\left(b^2+1\right)$取得最小值4.

故答案为：4.

空2，$\frac{2a^2-b+4}{a+1}+\frac{b^2-2a-2}{b+4}=\frac{2a^2+2a+2}{a+1}+\frac{b^2+b-4}{b+4}=\frac{2a(a+1)+2}{a+1}+\frac{b^2-16+b+4+8}{b+4}$

$=2a+\frac{2}{a+1}+b-3+\frac{8}{b+4}$

$=-1+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{a+1}+\frac{8}{b+4}\right)\left[\left(2(a+1)+(b+4)\right]\right.$

$=-1+\frac{1}{8}\left(4+8+\frac{2(b+4)}{a+1}+\frac{16(a+1)}{b+4}\right)$

$=-1+\frac{1}{8}\left(12+\frac{2(b+4)}{a+1}+\frac{16(a+1)}{b+4}\right)$

$\geq-1+\frac{1}{8}\left(12+8\sqrt{2}\right)$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

当$a=4\sqrt{2}-5,b=12-8\sqrt{2}$取等号.

故答案为：$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

12．(1)要使销售的总收入不低于原收入，每件定价最多为40元

(2)当该商品改革后的销售量a至少达到10.2万件时，才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和，此时该商品的每件定价为30元

【详解】（1）解：设每件定价为t元，依题意得$(8-\frac{t-25}{1}\times 0.2)t\geq 25\times 8$，

整理得 $t^2-65t+1000\leq 0$，

解得$25\leq t\leq 40$.

所以要使销售的总收入不低于原收入，每件定价最多为40元.

（2）解：依题意，$x>25$时，

不等式$ax\geq 25\times 8+50+\frac{1}{6}(x^2-600)+\frac{1}{5}x$有解

等价于$x>25$时，$a\geq\frac{150}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{5}$有解

$\because \frac{150}{x}+\frac{1}{6}x\geq 2\sqrt{\frac{150}{x}\cdot\frac{1}{6}x}=10$（当且仅当x=30时，等号成立）

$\therefore a\geq 10.2$．此时该商品的每件定价为30元

$\therefore$当该商品明年的销售量a至少应达到10.2万件时，才可能使明年的销售收入不低于原收入与总投入之和，此时该商品的每件定价为30元.

第二章　函数

1．A

【详解】对于A，$y=|x|$和$u=\sqrt{v^2}$的定义域都是$\mathbf{R}$，对应关系也相同，是同一个函数，故选项A正确；

对于B，函数$y=\sqrt{x^2}$的定义域为$\mathbf{R}$，函数$s=(\sqrt{t})^2$的定义域为$[0,+\infty)$，定义域不同，不是同一个函数，故选项B错误；

对于C，函数$y=\frac{x^2-1}{x-1}$的定义域为$\{x\mid x\neq 1\}$，函数$m=n+1$的定义域为$\mathbf{R}$，定义域不同，不是同一个函数，故选项C错误；

对于D，函数$y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$的定义域为$\{x\mid x\geq 1\}$，函数$y=\sqrt{x^2-1}$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，定义域不同，不是同一个函数，故选项D错误，

故选：A.

2．B

【详解】解：由函数$y=f(2^x)$的定义域为$[1,4]$，得$2^x\in[2,16]$，

所以函数$y=f\left(x\right)$的定义域为$\left[2,16\right]$，

由函数 $y=\dfrac{f(x+1)}{x-1}$，

得 $\begin{cases}2\le x+1\le 16\\ x-1\ne 0\end{cases}$，解得 $1<x\le 15$，

所以函数 $y=\dfrac{f(x+1)}{x-1}$ 的定义域为 $(1,15]$.

故选：B.

3．C

【详解】不等式 $x_1f\left(x_1\right)+x_2f\left(x_2\right)<x_1f\left(x_2\right)+x_2f\left(x_1\right)$ 恒成立，

即 $(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))<0$，

即 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，

所以分段函数在 R 上单调递减，（$x_1>x_2$ 时也会得到分段函数在 R 上单调递减），

故每段函数为减函数，应满足 $\begin{cases}0<a-1<1\\ 3\le \dfrac{9}{2a}\end{cases}$，解得 $1<a\le \dfrac{3}{2}$，

同时在在 R 上单调递减，对于边界值还需满足 $|6a-9|\ge (a-1)^{3-3}$，

解得 $a\le \dfrac{4}{3}$ 或 $a\ge \dfrac{5}{3}$，

所以 $1<a\le \dfrac{4}{3}$.

故选：C.

4．D

【详解】因为函数 $f\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$ 为偶函数，则 $f\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)=f\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)$，

令 $t=\dfrac{1}{2}x$ 可得 $f\left(1-t\right)=f\left(1+t\right)$，所以，$f\left(1+x\right)=f\left(1-x\right)$，

因为函数 $f\left(x-1\right)$ 为奇函数，则 $f\left(-x-1\right)=-f\left(x-1\right)$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，关于点 $\left(-1,0\right)$ 对称，

又因为函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $f\left(-1\right)=0$，则 $f\left(3\right)=f\left(-1\right)=0$，

$f\left(1\right)$、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f\left(0\right)$ 的值都不确定.

故选：D.

5．C

【详解】令 $0<x\le 1$，则 $-1<x-1\le 0$，故 $f(x-1)=x(x-1)$，而 $f(x)=3f(x-1)$，

所以 $f(x)=3x(x-1)$ 且 $x\in(0,1]$，

令 $-2<x\le -1$，则 $-1<x+1\le 0$，故 $f(x+1)=(x+1)(x+2)$，而 $f(x)=\frac{1}{3}f(x+1)$，

所以 $f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x+2)$ 且 $x\in(-2,-1]$，

结合已知：$x\in(k,k+1]$ 且 $k\in Z$ 时 $f(x)=3^{k+1}(x-k)[x-(k+1)]$，而 $3^{k+1}>0$，

对 $x\in(k,k+1]$ 且 $k\in Z$，$f(x)_{\min}=f(k+\frac{1}{2})=-\frac{3^{k+1}}{4}$，即随 k 增大 $f(x)_{\min}$ 依次变小，

要使对任意 $x\in\left(-\infty,m\right]$ 都有 $f\left(x\right)\ge -\frac{81}{16}$，令 $-\frac{3^{k+1}}{4}\ge -\frac{81}{16}$，则 $k\le 1$ 且 $k\in Z$，

则 $x\in(1,2]$ 上 $f(x)_{\min}=-\frac{9}{4}>-\frac{81}{16}$，且 $x\in(2,3]$ 上 $f(x)_{\min}=-\frac{27}{4}<-\frac{81}{16}$，

当 $x\in(2,3]$ 时，令 $f(x)=27(x-2)(x-3)=-\frac{81}{16}$，则 $(x-2)(x-3)=-\frac{3}{16}$，解得 $x=\frac{9}{4}$ 或 $x=\frac{11}{4}$，

综上，要使对任意 $x\in\left(-\infty,m\right]$ 都有 $f\left(x\right)\ge -\frac{81}{16}$，只需 $m\le\frac{9}{4}$.

故选：C

6．ABD

【详解】由题意可知：当 $x>0$ 时，满足条件 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的函数 $f(x)$ 的图象是凹形曲线，

对于 A，函数 $f(x)=x^{-1}$ 在第一象限的图象是一条凹形曲线，故当 $x_2>x_1>0$ 时，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，故选项 A 满足；

对于 B，函数 $f(x)=x^3$ 的图象在第一象限是凹形曲线，故当 $x_2>x_1>0$ 时，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，故选项 B 满足；

对于 C，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的图象在第一象限是凸形曲线，故当 $x_2>x_1>0$ 时，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，故选项 C 不满足；

对于 D，函数 $f(x)=e^{-x}$ 的图象在第一象限是凹形曲线，故当 $x_2>x_1>0$ 时，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，故选项 D 满足；

综上，满足条件的是 ABD，

故选：ABD.

7．ABD

【详解】对于 A，因为函数 $f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{1+2^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^x}$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $f(-x)=\frac{2^{-x}}{1+2^{-x}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+2^x}-\frac{1}{2}=-f\left(x\right)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数，故选项 A 正确；

对于 B，因为 $y=1+2^x$ 、$y=-\frac{1}{1+2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，故选项 B 正确；

对于 C，因为 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^{x}}$，则 $g\left(1\right)=\left[f\left(1\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2}\right]=0$，

$g\left(-1\right)=\left[f\left(-1\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right]=-1$，因为 $g\left(-1\right)\neq g\left(1\right)$ 所以函数 $g(x)$ 不是偶函数，故选项 C 错误；

对于 D，又 $1+2^{x}>1$，所以 $-\frac{1}{2}<f(x)<\frac{1}{2}$，故 $g(x)=[f(x)]$ 的值域为 $\left\{-1,0\right\}$，故选项 D 正确.

故选：ABD.

8．ABC

【详解】对于 A 选项，由函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)+\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}+3$，函数定义域为 R，则

$f(-x)=\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)+\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}+3=\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)-\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}+3$

所以 $f(-x)+f(x)=\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)+\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}+3+\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)-\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}+3$

$=\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)+\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}+3-\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}+3=6$，所以 $f(-x)+f(x)=6$，故 A 选项正确.

对于 B 选项，因为 $g(x)$ 满足 $g(-x)+g(x)=6$，$g(x)$ 的图象关于点 $(0,3)$ 成中心对称.故 B 选项正确.

对于 C 选项，设 $h(x)=\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)+\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}$，则 $h(-x)+h(x)=0$，则 $h(x)$ 为奇函数，由函数单调性的性质可知，当 $x>0$ 时，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)$ 在 R 上为增函数，则 $f(x)=h(x)+3$ 也为 R 上的增函数，因为实数 a、b 满足 $f(a)+f(b)>6$，且 $f(-a)+f(a)=6$，则 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(a)$，即 $f(b)>f(-a)$，所以 $b>-a$，即 $a+b>0$.故 C 选项正确.

对于 D 选项，由 $f(-x)+f(x)=6$，$g(-x)+g(x)=6$，$f(x)$ 的图象关于点 $(0,3)$ 成中心对称，$g(x)$ 的图象也关于点 $(0,3)$ 成中心对称，令 $x=0$，则 $f(0)=3,g(0)=3$，因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点为 $\left(x_{1},y_{1}\right)$、$\left(x_{2},y_{2}\right)$、$\left(x_{3},y_{3}\right)$，不妨设 $x_{1}<x_{2}<x_{3}$，由对称性可知，$x_{1}+x_{3}=0,x_{2}=0$，所以 $y_{1}+y_{3}=6,y_{2}=3$，则 $y_{1}+y_{2}+y_{3}=9$.故 D 选项错误.

故选：ABC

9．-1

【详解】$f\left(x+1\right)$ 为偶函数，故可得 $f\left(x+1\right)=f\left(-x+1\right)$，即 $f\left(x\right)=f\left(-x+2\right)$，

又 $f\left(x\right)$ 为奇函数，则 $f\left(-x+2\right)=-f\left(x-2\right)$，则 $f\left(x\right)=-f\left(x-2\right)$，$f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，

故 $f\left(x+2\right)=f\left(x-2\right)$，$f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$，即 $f\left(x\right)$ 是周期为 4 的函数，

又 $f\left(x\right)$ 为 R 上的奇函数，则 $f\left(0\right)=0$，又 $f\left(1\right)=1$，则 $f\left(2020\right)-f\left(2021\right)=f\left(0\right)-f\left(1\right)=-1$.

故答案为：-1.

10．$\left(-\infty,2\sqrt{2}-1\right)$

【详解】$f(x)$ 的定义域为 R，

且 $f(-x)=-x+\ln\left(\sqrt{1+(-x)^2}-x\right)=-x+\ln\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}\right]=-x-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

则 $f(x)$ 为奇函数，由增函数加增函数为增函数可知

函数 $f(x)=x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ 为增函数，

不等式 $f\left(3^x-9^x\right)+f\left(a\cdot 3^x-2\right)<0$ 对任意实数 x 恒成立，

等价于 $f\left(3^x-9^x\right)<-f\left(a\cdot 3^x-2\right)=f\left(2-a\cdot 3^x\right)$，

可得 $3^x-9^x<2-a\cdot 3^x$，

即 $a<\dfrac{2}{3^x}+3^x-1$，因为

$\dfrac{2}{3^x}+3^x-1\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{3^x}\cdot 3^x}-1=2\sqrt{2}-1$，

当且仅当 $\dfrac{2}{3^x}=3^x$ 即 $x=\log_3\sqrt{2}$ 时,取等号，所以 $a\in(-\infty,2\sqrt{2}-1)$.

故答案为：$(-\infty,2\sqrt{2}-1)$.

11． $4\sqrt{3}-2$

【详解】设 $f(x)=x^3+5x$， $x\in(0,+\infty)$，则

任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $0<x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^{\ 3}+5x_1-\left(x_2^{\ 3}+5x_2\right)=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+5\right)$.

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$， $x_1^2+x_1x_2+x_2^2+5>0$，

所以 $\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+5\right)<0$，即 $f(x_1)-f(x_2)<0$，于是 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)=x^3+5x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $a^3+5a=\dfrac{8}{(b+1)^3}+\dfrac{10}{b+1}$，所以 $a^3+5a=\left(\dfrac{2}{b+1}\right)^3+5\times\dfrac{2}{b+1}$，即 $f(a)=f(\dfrac{2}{b+1})$，

所以 $a=\dfrac{2}{b+1}$.

因为 $b>0$，所以 $2(b+1)>0$， $\dfrac{6}{b+1}>0$，

所以 $3a+2b=3\times\dfrac{2}{b+1}+2b=\dfrac{6}{b+1}+2(b+1)-2\geq 2\sqrt{\dfrac{6}{b+1}\times 2(b+1)}-2=4\sqrt{3}-2$，

当且仅当 $\dfrac{6}{b+1}=2(b+1)$，且 $a=\dfrac{2}{b+1}$，即 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},b=\sqrt{3}-1$，等号成立，

所以当 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},b=\sqrt{3}-1$ 时， $3a+2b$ 取得的最小值为 $4\sqrt{3}-2$.

故答案为： $4\sqrt{3}-2$.

12．(1)单调递增，证明见解析；

(2)$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

【详解】（1）$f(x)$在R上单调递增，证明如下，

令$x+y=x_1$，$x=x_2$，$y=x_1-x_2$，且$x_1>x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)-1$，

因为$x_1>x_2$，所以$x_1-x_2>0$，$f(x_1-x_2)>1$，即$f(x_1)-f(x_2)>0$，$f(x_1)>f(x_2)$，

所以$f(x)$在R上单调递增.

（2）$f(3x^2-4x-2)+2f(x)>4$

$f(3x^2-4x-2)+f(x)-1>-f(x)+3$

$f(3x^2-3x-2)>-f(x)+3$

$f(3x^2-3x-2)+f(x)-1>2$

$f(3x^2-2x-2)>2=f(-1)$，

因为$f(x)$在R上单调递增，所以$3x^2-2x-2>-1$，整理得$(x-1)(3x+1)>0$，解得$x<-\frac{1}{3}$或$x>1$，

所以不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

第三章　二次函数、幂函数、指数函数

1．A

【解析】分解因式确定二次方程的解，然后写出不等式的解集.

【详解】由$3x^2-5x-2\le 0$得$(x-2)(3x+1)\le 0$，解为$-\frac{1}{3}\le x\le 2$．即解集为$\left[-\frac{1}{3},2\right]$.

故选：A.

2．D

【分析】由指数运算法则直接计算可得结果.

【详解】$\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt[3]{m^4}}{\sqrt[6]{m^5}}=\frac{m^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{4}{3}}}{m^{\frac{5}{6}}}=m^{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}=m$.

故选：D.

3．A

【分析】要使函数 $f(x)=(m^2+m-1)x^m$ 是幂函数，且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，求出 $m=1$，可得函数 $g(x)$ 为奇函数，即充分性成立；函数 $g(x)=2^x-m^2\cdot2^{-x}$ 为奇函数，求出 $m=\pm1$，故必要性不成立，可得答案.

【详解】要使函数 $f(x)=(m^2+m-1)x^m$ 是幂函数，且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

则 $\begin{cases}m^2+m-1=1\\m>0\end{cases}$，解得：$m=1$，当 $m=1$ 时，$g(x)=2^x-2^{-x}$，$x\in R$，

则 $g(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-g(x)$，所以函数 $g(x)$ 为奇函数，即充分性成立；

“函数 $g(x)=2^x-m^2\cdot2^{-x}$ 为奇函数”，

则 $g(x)=-g(-x)$，即 $2^x-m^2\cdot2^{-x}=-(2^{-x}-m^2\cdot2^x)=m^2\cdot2^x-2^{-x}$，

解得：$m=\pm1$，故必要性不成立，

故选：A.

4．C

【分析】先确定函数的奇偶性，然后再确定函数值的正负.

【详解】$f(x)=x(\frac{2}{1+2^x}-1)=\frac{x(1-2^x)}{1+2^x}$，$f(-x)=\frac{-x(1-2^{-x})}{1+2^{-x}}=\frac{x(1-2^x)}{1+2^x}=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是偶函数，排除 B，D，

$x>0$ 时，$2^x>1$，$1-2^x<0$，$f(x)<0$，排除 A．只有 C 可选.

故选：C.

【点睛】本题考查由函数解析式选择函数图象，解题时可通过函数解析式研究函数的性质如奇偶性、单调性等等，再研究函数的特殊值，特殊点，函数值的正负，函数值的变化趋势等，用排除法确定正确选项.

5．D

【分析】根据 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的性质可以判断 $h(x)$ 关于 $(0,2)$ 中心对称，所求的函数值之和可根据对称性求解

【详解】因为函数 $f(x)$ 既是二次函数又是幂函数，所以函数 $f(x)=x^2$，又 $g(x)+g(-x)=\ln(1+x^2-x^2)=0$，所以 $g(x)$ 是奇函数，$h(x)=\frac{g(x)}{x^2+2}+2$，因为 $h(-x)+h(x)=\frac{g(-x)}{x^2+2}+2+\frac{g(x)}{x^2+2}+2=4$，所以 $h(x)$ 关于 $(0,2)$ 中心对称，

所以 $h(20)+h(19)+\cdots+h(1)+h(0)+h(-1)+\cdots h(-19)+h(-20)=20\times4+2=82$，故选：D

6．BCD

【分析】根据不等式的解集求出 a、b，再解不等式 $ax^2+bx-3<0$ 可判断 A；取 $a=-1$，$b=0$，解不等式 $-x^2-3>0$ 可判断 B；取 $a=-1$，$b=4$ 可判断 C；根据根的分布、充要条件的定义可判断 D.

【详解】若不等式 $ax^2+bx-3<0$ 的解集是 $\{x|x>3\}$，则 $a=0$ 且 $3b-3=0$，得 $b=1$，

而当 $a=0$，$b=1$ 时，不等式 $ax^2+bx-3<0$，即 $x-3<0$，得 $x<3$，与 $x>3$ 矛盾，故 A 错误；

取 $a=-1$，$b=0$，此时不等式 $-x^2-3>0$ 的解集为 $\varnothing$，故 B 正确；

函数 $y=ax^2+bx-3$ 的图象与 x 轴正半轴可以有两个交点,即 $ax^2+bx-3=0$ 可以有 2 个正根，取 $a=-1$，$b=4$，则由 $y=-x^2+4x-3=0$，得 x=1 或 3，故 C 正确；

若关于 x 的方程 $ax^2+bx-3=0$ 有一个正根和一个负根，则 $\begin{cases}a\neq 0,\\ -\dfrac{3}{a}<0,\end{cases}$ 得 $a>0$，

若 $a>0$，则 $\Delta=b^2+12a>0$，故关于 x 的方程 $ax^2+bx-3=0$ 有两个不等的实根 x_1,x_2，

且 $x_1x_2=-\dfrac{3}{a}<0$，即关于 x 的方程 $ax^2+bx-3=0$ 有一个正根和一个负根.

因此“关于 x 的方程 $ax^2+bx-3=0$ 有一个正根和一个负根”的充要条件是“$a>0$”，故 D 正确.

故选：BCD.

7．BC

【分析】对底数 a 分情况讨论即可得答案.

【详解】解：若 $0<a<1$，则 $y=a^x-(b+1)$ 的图像必过第二象限，而函数 $y=a^x-(b+1)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图像过第一、三、四象限，所以 $a>1$.

当 $a>1$ 时，要使 $y=a^x-(b+1)$ 的图像过第一、三、四象限，则 $b+1>1$，即 $b>0$.

故选：BC

【点睛】此题考查了指数函数的图像和性质，属于基础题.

8．BC

【解析】计算 $g(-1),g(1)$ 得出 $g(1)\neq g(-1),g(1)\neq -g(-1)$ 判断选项 A 不正确；用函数的奇偶性定义，可证 $f(x)$ 是奇函数，选项 B 正确；通过分离常数结合复合函数的单调性，可得出 $f(x)$ 在 R 上是增函数，判断选项 C 正确；由 $y=e^x$ 的范围，利用不等式的关系，可求出 $-\dfrac{1}{2}<f(x)<\dfrac{1}{2}$，选项 D 不正确，即可求得结果.

【详解】根据题意知，$f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+e^x}$.

$\because g(1)=[f(1)]=\left[\dfrac{e}{1+e}-\dfrac{1}{2}\right]=0,$

$g(-1)=[f(-1)]=\left[\dfrac{1}{e+1}-\dfrac{1}{2}\right]=-1$，

$\therefore g(1)\neq g(-1),g(1)\neq -g(-1)$，

∴函数 $g(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，A 错误；

$\because f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}=-f(x)$，

∴ $f(x)$ 是奇函数，B 正确；

Q $y=e^x$ 在 R 上是增函数，由复合函数的单调性知 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+e^x}$ 在 R 上是增函数，C 正确；

$\because e^x>0$，$\therefore 1+e^x>1$，$0<\dfrac{1}{1+e^x}<1,-1<-\dfrac{1}{1+e^x}<0$，

$\therefore -\frac{1}{2}<f(x)<\frac{1}{2}$，$\therefore g(x)=[f(x)]=\{-1,0\}$，D 错误.

故选：BC.

【点睛】关键点睛：本题是一道以数学文化为背景，判断函数性质的习题，属于中档题型，本题的关键是理解函数$g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]$，然后才会对函数$f\left(x\right)$变形，并作出判断.

9．6

【分析】可设$y=f(x)=ax^2+8(a+1)x+7a+16$，根据函数图像为抛物线，结合题意求出$a$的值，再解对应的不等式，从而求出不等式的非负整数解的和.

【详解】设$y=f(x)=ax^2+8(a+1)x+7a+16$，$a=0$不合题意，$\therefore a\neq 0$，函数图像为抛物线.

对于任意一个给定的a值，其抛物线只有在开口向下的情况下才能满足$y\geq 0$时整数解只有有限个，所以$a<0$.

因为 0 为其中的一个解，所以$f(0)=7a+16\geq 0$，解得$a\geqslant -\frac{16}{7}$，

又因为$a\in \mathrm{Z}$，所以$a=-2$或$a=-1$，

当$a=-2$时不等式为$-2x^2-8x+2\geqslant 0$，解不等式得$-\sqrt{5}-2\leq x\leq \sqrt{5}-2$，

因为x为非负整数，所以$x=0$；

当$a=-1$时不等式为$-x^2+9\geqslant 0$，解不等式得$-3\leqslant x\leqslant 3$；

因为x为非负整数，所以$x=$0，1，2，3；

综上知，全部不等式的非负整数解的和为$0+1+2+3=6$.

故答案为：6

10．$\frac{3}{4}$

【分析】令$3^x=t$，利用二次函数性质先求 b，然后可解.

【详解】$f(x)=9^x-3^{x+1}+b=(3^x)^2-3\times 3^x+b$

令$3^x=t$，则$y=t^2-3t+b=(t-\frac{3}{2})^2+b-\frac{9}{4}$

因为$x\in[-1,1]$，所以$t\in[\frac{1}{3},3]$，

所以当$t=3$时函数有最大值，故$3^2-3\times 3+b=3$，解得$b=3$，

当$t=\frac{3}{2}$时，函数有最小值$b-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$.

故答案为：$\frac{3}{4}$

11．$(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

【分析】根据幂函数的单调性和奇偶性得到$m=1$，代入不等式得到$\left(a+1\right)^{\frac{1}{3}}<\left(3-2a\right)^{\frac{1}{3}}$，根据函数的单调性解得答案.

【详解】幂函数$y=x^{m^2-2m-3}\left(m\in N^*\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，故$m^2-2m-3<0$，解得$-1<m<3$.

$m \in N^*$，故 $m=0$，1，2．

当 $m=0$ 时 ，$y=x^{-3}$ 不关于 y 轴对称，舍去；

当 $m=1$ 时 ，$y=x^{-4}$ 关于 y 轴对称，满足；

当 $m=2$ 时 ，$y=x^{-3}$ 不关于 y 轴对称，舍去；

故 $m=1$，$(a+1)^{-\frac{1}{3}}<(3-2a)^{-\frac{1}{3}}$，函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

故 $a+1>3-2a>0$ 或 $0>a+1>3-2a$ 或 $a+1<0<3-2a$，解得 $a<-1$ 或 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$.

故答案为：$(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

12．(1) $a=2$

(2) $(1,+\infty)$

(3) $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$

【分析】（1）根据奇函数满足 $f(-x)+f(x)=0$，即可求解；（2）根据 $f(x)$ 的单调性，即可根据函数值的大小确定自变量的大小，即可转化求解，（3）将恒成立问题转化为最值问题，即可利用二次函数的性质求最值进行求解.

【详解】（1）因为 $f(x)=a\cdot 2^x-2^{1-x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=0$，

即 $a\cdot 2^{-x}-2^{1+x}+a\cdot 2^x-2^{1-x}=0$，即 $(a-2)\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)=0$，

因为 $2^x+\frac{1}{2^x}>0$，所以 $a\text{-}2=0$，所以 $a=2$（经检验，$a=2$ 符合题意）

（2）由（1）得 $f(x)=2^{1+x}-2^{1-x}$，

因为 $y=2^{1+x}$ 与 $y=-2^{1-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上均为增函数，所以 $f(x)=2^{1+x}-2^{1-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

又 $f(1)=3$，所以 $f(f(x)-2)>f(1)$，

所以 $f(x)-2>1$，即 $f(x)>3=f(1)$，

所以 $x>1$，所以不等式 $f[f(x)-2]>3$ 的解集是 $(1,+\infty)$.

（3）因为关于 x 的不等式 $f(x)>\frac{k}{2^{x-1}}+2$ 恒成立，即 $2^{1+x}-2^{1-x}>\frac{k}{2^{x-1}}+2$ 恒成立，

所以 $k<2^{2x}-2^x-1$ 恒成立，所以 $k<\left(2^{2x}-2^x-1\right)_{\min}$，

因为 $2^{2x}-2^x-1=\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，

所以当 $2^x=\frac{1}{2}$，即 $x=-1$ 时，$2^{2x}-2^x-1$ 取得最小值 $-\frac{5}{4}$.

所以 $k<-\frac{5}{4}$，即实数 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$

第四章　对数、对数函数

1.【答案】C

【分析】利用特殊值确定正确答案.

【详解】令 $f(x)=\log_2 x=1$，解得 $x=2$；

令 $g(x)=\log_5 x=1$，解得 $x=5$；

令 $h(x)=\lg x=1$，解得 $x=10$，

即当 $x>1$ 时，对应的底数越大，图象越靠近 x 轴

故 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的图象所对应的编号依次为③②①.

故选：C

2.【答案】D

【分析】分别求出 a,b,c 的范围，再比较大小.

【详解】根据对数换底公式可知，$a=\log_{\frac{1}{5}}3=-\log_5 3>-\log_5 5=-1$，所以 $-1<a<0$，$b=\log_{\frac{1}{3}}5=-\log_3 5<-\log_3 3=-1$，

所以 $b<-1$，$c=\left(\frac{1}{5}\right)^{0.3}>0$ ，

所以 $b<a<c$.

故选：D

3.【答案】B

【分析】要使 $g(x)$ 有意义，根据抽象函数的定义域、对数真数不为 0、分母不为 0 可得到答案.

【详解】要使 $g(x)=\dfrac{f(1+x)}{\ln(1-x)}$ 有意义，

只需 $\begin{cases}-1<1+x<3\\1-x>0\\1-x\neq 1\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2<x<2\\x<1\\x\neq 0\end{cases}$，

解得 $-2<x<0$ 或 $0<x<1$，

则函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-2,0)\cup(0,1)$.

故选：B.

4.【答案】B

【分析】设 $1-y=t$，对式子 $\ln(1-y)-y+3=0$ 换元结合 $f(x)=x+\ln x+2$ 单调性可得 $x=t$，即可求值.

【详解】设 $1-y=t\Rightarrow y=1-t$，则 $\ln(1-y)-y+3=\ln t+t+2=0$，

又 $f(x)=x+\ln x+2$ 单调递增，所以 $f(x)=f(t)=0\Rightarrow x=t$，故 $y=1-t=1-x\Rightarrow x+y=1$.

5.【答案】B

【分析】构造函数$g(x)=f(x)-1011$，由$g(x)$的单调性与奇偶性转化求解，

【详解】令$g(x)=f(x)-1011=2022^{x}+\log_{2022}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-2022^{-x}$,

由指数函数与对数函数性质得$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

$g(-x)=2022^{-x}+\log_{2022}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-2022^{x}=2022^{-x}-\log_{2022}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-2022^{x}=-g(x)$，

故$g(x)$为奇函数，$g(x)$在R上单调递增，

原不等式可化为$g(4x+1)+g(2x+1)<0$，即$g(4x+1)<g(-2x-1)$，

得$4x+1<-2x-1$，解得$x<-\frac{1}{3}$，

故选：B

6.【答案】CD

【分析】根据对数的运算及对数函数的定义域与性质直接判断.

【详解】A选项，函数的定义域为$(0,+\infty)$，故$f(0)$无意义，错，

B选项，$f(x_1+x_2)=\lg(x_1+x_2)$，$f(x_1)\cdot f(x_2)=\lg x_1\cdot\lg x_2$，而$\lg(x_1+x_2)\neq\lg x_1\cdot\lg x_2$，错，

C选项，$f(x_1\cdot x_2)=\lg(x_1\cdot x_2)=\lg x_1+\lg x_2=f(x_1)+f(x_2)$，对，

D选项，$f(x)=\lg x$在$(0,+\infty)$单调递增，则$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，对，

故选CD.

7.【答案】ABD

【分析】分别应用指对数转换及对数运算,解对数不等式,对数函数值域等判断选项A,B,C,

再应用同角三角函数关系把函数转化为二次函数求值域即可判断选项D.

【详解】对于A:已知函数$y=\sqrt{1-\log_2(1-x)}$,可得$1-\log_2(1-x)\geq 0$,

即得$\log_2(1-x)\leq 1$, $0<1-x\leq 2$可得$-1\leq x<1$,

所以函数$y=\sqrt{1-\log_2(1-x)}$的定义域为$[-1,1)$,故A正确;

对于B:$f(x)=\log_2 x+\log_2(4-x)=\log_2 x(4-x)=\log_2\left(4x-x^2\right)=\log_2 t$,$t=4x-x^2$

当$x=2$时,t最大值为4,$f(x)_{\max}=\log_2 4=2$,故B正确;

对于C:因为$(\frac{1}{2})^a=3^b=m$,所以$a=\log_{\frac{1}{2}}m,b=\log_3 m$,

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\log_m\frac{1}{2}-\log_m 3=\log_m\frac{1}{6}=2$,可得 $m^2=\frac{1}{6}$,即 $m=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$,故C错误;

对于D : $y=2\cos^2 x+2\sin x-1=2\left(1-\sin^2 x\right)+2\sin x-1=-2\sin^2 x+2\sin x+1$,

令 $t=\sin x,-1\le t\le 1$ $y=-2t^2+2t+1$,

当 $t=\frac{1}{2}$ 时 $y_{\max}=-2\times\frac{1}{4}+1+1=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,故D 正确.

故选: ABD .

8.【答案】ABD

【分析】对于 A，利用偶函数的定义可判断 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称；

对于 B，利用基本不等式求出 $\frac{x^2+1}{|x|}$ 的最小值，再根据对数函数的单调性可求出函数 $f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$ ；

对于 C，当 $x>0$ 时，根据 $f(\frac{1}{2})<f(\frac{1}{3})$ ，可判断 $f(x)$ 不是增函数；

对于 D，根据 $y=f(x)-m$ 是偶函数，其图象关于 y 轴对称，可判断出函数 $y=f\left(x\right)-m$ 的所有零点之和为 0.

【详解】对于 A， $f(-x)=\lg\frac{(-x)^2+1}{|-x|}=\lg\frac{x^2+1}{x}=f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，故 A 正确；

对于 B，因为 $\frac{x^2+1}{|x|}=|x|+\frac{1}{|x|}\ge 2$ ，当且仅当 $|x|=1$ 时取等号，所以 $f\left(x\right)=\lg\frac{x^2+1}{|x|}\ge\lg 2$ ，所以函数 $f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$ ，故 B 正确；

对于 C，当 $x>0$ 时， $f(x)=\lg(x+\frac{1}{x})$ ， $f(\frac{1}{2})=\lg\frac{5}{2}<f(\frac{1}{3})=\lg\frac{10}{3}$ ，所以 $f(x)$ 不是增函数，故 C 不正确；

对于 D，因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $y=f(x)-m$ 也是偶函数，其图象关于 y 轴对称，

所以函数 $y=f(x)-m$ 的图象与 x 轴的交点关于 y 轴对称，所以函数 $y=f\left(x\right)-m$ 的所有零点之和为 0，故 D 正确.

故选：ABD

9.【答案】 $\frac{15}{4}$.

解：原式 $=\log_3 3^{-\frac{1}{4}}+\lg 100+1=-\frac{1}{4}+2+2=\frac{15}{4}$.

10.【答案】 -3

【分析】根据反函数的性质可知当 $x>0$ 时， $f(x)=2^x$ ，再根据 $g(x)$ 是奇函数，即可求出 $g(-1)$ 的值.

【详解】解：∵当 $x>0$ 时， $f\left(x\right)$ 的图像与函数 $y=\log_2 x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，

∴当 $x>0$ 时， $f\left(x\right)=2^x$,∴当 $x>0$ 时， $g\left(x\right)=2^x+x^2$ ，

又 $g\left(x\right)$ 是奇函数，∴ $g\left(-1\right)=-g\left(1\right)=-3$.

故答案为： -3 .

11.【答案】$\left(-\frac{1}{3},0\right)$

【分析】根据题意，$\forall x_1\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$,$\exists x_2\in[1,2]$ 使得 $f\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)>6$，即 $\left[f(x)-6\right]_{\min}>\left[-g(x)\right]_{\min}$，将问题转化为求 $f(x)$ 的最小值，与 $g(x)$ 的最大值，$g(x)$ 的最值需要对 m 进行分类讨论，进而可得出关于实数 m 的不等式，综合可得出实数 m 的取值范围.

【详解】因为对于 $\forall x_1\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$,$\exists x_2\in[1,2]$ 使得 $f\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)>6$，

即 $\left[f(x)-6\right]_{\min}>\left[-g(x)\right]_{\min}$，即 $\left[f(x)-6\right]_{\min}>-g(x)_{\max}$.

因为 $f(x)=\log_2\left(x^2-2x+9\right)$，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$(-\infty,1)$ 单调递减，

$f(x)_{\min}=f(1)=3$，即 $-3>-g(x)_{\max}$，即 $g(x)_{\max}>3$，

又 $g\left(x\right)=m\cdot 4^x+2^{x+1}\left(m<0\right)$，

设 $t=2^x$，则 $t\in\left[2,4\right]$，$h(t)=mt^2+2t$，对称轴为 $t=-\frac{1}{m}>0$，

①当 $-\frac{1}{m}\geq 4$, 即 $-\frac{1}{4}\leq m<0$ 时，$h(t)_{\max}=h(4)=16m+8$，即 $16m+8>3$，

解得 $m>-\frac{5}{16}$，所以 $-\frac{1}{4}\leq m<0$；

②当 $2<-\frac{1}{m}<4$, 即 $-\frac{1}{2}<m<-\frac{1}{4}$，$h(t)_{\max}=h(-\frac{1}{m})=-\frac{1}{m}$，即 $-\frac{1}{m}>3$，解得 $-\frac{1}{3}<m<0$.

所以解集为 $-\frac{1}{3}<m<-\frac{1}{4}$，

③当 $-\frac{1}{m}\leq 2$ 时，即 $m\leq -\frac{1}{2}$，$h(t)_{\max}=h(2)=4m+4>3$，解得 $m>-\frac{1}{4}$，此时解集为 $\varnothing$.

综上，m 的取值范围是 $(-\frac{1}{3},0)$

故答案为：$(-\frac{1}{3},0)$

12.【答案】(1) $\left[0,+\infty\right)$

(2) $a=0$

(3)答案见解析

【分析】(1）参变分离转化为求最值问题，通过换元成二次函数最值问题可解；

（2）根据内层函数 $h\left(x\right)=a\cdot 9^x+3^x-1$ 的值域应包含 $\left(0,+\infty\right)$，然后讨论可得；

（3）先求 $g\left(x\right)$ 的解析式，然后讨论其单调性，利用单调性去掉函数符号，最后分类讨论可得不等式解集.

【详解】(1）由题意，$x\in\left(0,1\right)$，$a\cdot 9^x+3^x-1>0$，

即 $a>\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，令 $u=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $a>u^2-u$ 恒成立，

$\because \frac{1}{3}<u<1$，得 $\left(u^2-u\right)=(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}<0$，

$\therefore a\geq 0$，得 a 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

（2）令 $h(x)=a\cdot 9^x+3^x-1$，由题意， $h(x)$ 的值域包含 $(0,+\infty)$，

①$a=0$ 时，$h(x)=3^x-1$，其值域为 $(-1,+\infty)$，满足条件；

②$a<0$ 时，$h(x)=a\cdot 9^x+3^x-1$，令 $t=3^x$，

所以 $y=at^2+t-1=a\left(t+\frac{1}{2a}\right)^2-1-\frac{1}{4a}$ 为开口向下的抛物线，

易知 $h(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,-1-\frac{1}{4a}\right)$，不满足条件；

综上，$a=0$.

（3）$x>0$ 时，$g(x)=10^{f(x)}+1=10^{\lg(3^x-1)}+1=3^x$，

若 $x<0$，$-x>0$，$g(-x)=3^{-x}$，又 $\because g(x)$ 为奇函数，$\therefore x<0$ 时，$g(x)=-3^{-x}$，

综上，$g(x)=\begin{cases}3^x,x>0\\0,x=0\\-3^{-x},x<0\end{cases}$，$\frac{g^3(x)}{|g(x)|}=g(2x)$，且 $x\neq 0$，

$x>0$ 时，$g(x)=3^x$ 单调递增，且 $g(x)>0$，$x<0$ 时，$g(x)=-3^{-x}$ 单调递增且 $g(x)<0$，所以 $g(x)$ 为单调递增函数，

$g(x^2+tx-2t)\geq\frac{g^3(x)}{|g(x)|}\Leftrightarrow g(x^2+tx-2t)\geq g(2x)\Leftrightarrow x^2+tx-2t\geq 2x$

即解关于 x 的不等式：$x^2+(t-2)x-2t\geq 0$，$x\neq 0$，

①当 $t<-2$ 时，解集为 $\{x|x<0$ 或 $0<x\leq 2$ 或 $x\geq -t\}$；

②当 $t=-2$ 时，解集为 $\{x|x\neq 0\}$；

③当 $-2<t\leq 0$ 时，解集为 $\{x|x<0$ 或 $0<x\leq -t$ 或 $x\geq 2\}$；

④当 $t>0$ 时，解集为 $\{x|x\leq -t$ 或 $x\geq 2\}$

第五章　三角函数概念、公式

1.【答案】C

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，有 $A+B+C=\pi$，$\therefore \sin\left(A+B\right)=\sin C$，故 A 错误；$\cos\left(A+B\right)=-\cos C$，故 B 错误；

$\cos\dfrac{B+C}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi-A}{2}\right)=\sin\dfrac{A}{2}$，故 C 正确；

$\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi-A}{2}\right)=\cos\dfrac{A}{2}$，故 D 错误.

$\therefore$等式一定成立的是 C.

故选：C.

2.【答案】C

【解析】在单位圆中，$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+m^2=1$，解得 $m=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故 $\sin\alpha=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

故选：C.

3.【答案】B

【解析】因为 $\cos\left(\alpha+k\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$，所以 $k\cdot\dfrac{\pi}{2}=2n\pi+\pi\ \left(n\in Z\right)$，即 $k=4n+2\left(n\in Z\right)$，

所以满足条件的一个 k 的值为 2.

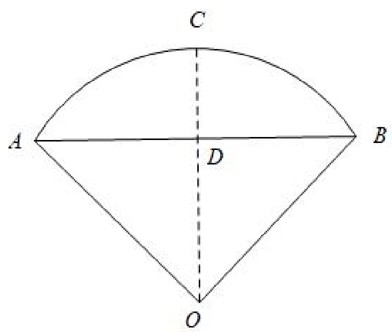
故选：B

4.【答案】B

【解析】如图所示，由题意知“弓”所在的弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 的长

$l=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{5\pi}{8}$，其所对圆心角 $\alpha=\dfrac{\frac{5\pi}{8}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{\pi}{2}$，

则两手之间的距离 $\left|AB\right|=2\left|AD\right|=2\times\dfrac{5}{4}\times\sin\dfrac{\pi}{4}\approx 1.768\ (\text{m})$.



故选：B.

5.【答案】A

【解析】因为 $f\left(x\right)=x^2-\left(a+1\right)x+\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\sin\theta\right)=f\left(\cos\theta\right)=0$，

所以 $\sin\theta,\cos\theta$ 是方程 $f\left(x\right)=0$ 的两个根，

则 $\sin\theta+\cos\theta=a+1$，$\sin\theta\cos\theta=2a+\dfrac{1}{2}$，

$\because \left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2=1+2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\left(a+1\right)^2=1+2\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)$，

化简得：$a^2-2a-1=0\Rightarrow a=1+\sqrt{2}$ 或 $1-\sqrt{2}$，

$\because -\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$，即 $-\sqrt{2}\le a+1\le\sqrt{2}$，

∴ $a=1-\sqrt{2}$.

则 $\frac{\lambda}{\lambda^2+1}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$,

$=\sin\theta\cos\theta=2a+\frac{1}{2}=2\left(1-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-2\sqrt{2}$,

故选：A.

6.【答案】ABD

【解析】由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ …①，以及 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ，

对等式①两边取平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$ ， $\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$ …②，

Q $\theta\in\left(0,\pi\right)$ ，$\therefore\sin\theta>0$，由②，$\cos\theta<0$ ，

由①② $\sin\theta$ ，$\cos\theta$ 可以看作是一元二次方程 $x^2-\frac{\sqrt{5}}{5}x-\frac{2}{5}=0$ 的两个根，

解得 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

故 A 正确，B 正确，C 错误，D 正确；

故选：ABD.

7.【答案】CD

【解析】对于 A，$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$，故 A 错误；

对于 B，$\sin\left(2A+2B\right)=\sin\left[2\left(\pi-C\right)\right]=\sin\left(2\pi-2C\right)=-\sin 2C$，故 B 错误；

对于 C，$\tan\left(A+B\right)=\tan\left(\pi-C\right)=-\tan C$，故 C 正确；

对于 D，$\sin\left(A+B\right)=\sin\left(\pi-C\right)=\sin C$，故 D 正确.

故选：CD.

8.【答案】AC

【解析】∵ $\sin\left(\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，∴ $\sin\alpha=\frac{1}{4}$，若 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，所以 $\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，

故 A 符合条件；

$\cos\left(\pi+\beta\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，故 B 不符合条件；

$\tan\beta=\sqrt{15}$，即 $\sin\beta=\sqrt{15}\cos\beta$，又 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，∴ $\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，故 C 符合条件；

$\tan\beta=\frac{\sqrt{15}}{5}$，即 $\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{5}\cos\beta$，又 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，∴ $\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$，故 D 不符合条件.

故选：AC.

9.【答案】$4-k$ 【解析】因为 $f(x)=ax^3+b\sin x+2(ab\neq 0)$，易得定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $f(-x)=a(-x)^3+b\sin(-x)+2=-ax^3-b\sin x+2$，

故 $f(x)+f(-x)=4$，即 $f(x)=4-f(-x)$，

所以 $f(-2019)=4-f(2019)=4-k$.

故答案为：$4-k$.

10.【答案】1

【解析】因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，所以 $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$，

所以 $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$，

所以 $\sin^2\alpha\left(1-\sin^2\beta\right)=\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1+\sin^2\beta\right)$，

所以 $2\sin^2\alpha-\sin^2\beta=1$，

故答案为：1.

11.【答案】1

【解析】由题意知，$\ln(2x-y)^2=\ln(x^2+y^2)$，

即 $(2x-y)^2=x^2+y^2, x, y>0$，

化简得 $3x=4y$，

则 $2\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2x-\frac{3}{4}x}{\sqrt{x^2+\frac{9}{16}x^2}}=1$.

故答案为：1

12.【解析】（1）由 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，可得 $\cos\alpha\neq 0$，所以 $\tan\alpha=2$

则 $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+3=\dfrac{\sin^2+\sin\alpha\cos\alpha+3\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{4\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{4\tan^2+\tan\alpha+3}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{4\times 2^2+2+3}{2^2+1}=\dfrac{21}{5}$.

（2）因为 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，可得 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{1}{25}$，

所以 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}$

因为 $0<\theta<\pi$ 且 $\sin\theta\cos\theta>0$，所以 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，可得 $\sin\theta+\cos\theta>0$

又由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{49}{25}$，所以 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$，

联立方程组$\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}\\ \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}\end{cases}$，解得$\sin\theta=\dfrac{4}{5},\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，

所以$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{3}$.

13.【解析】（1）由题意得$\beta=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$，

所以$\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\pi-\beta)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}=-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-1$.

（2）因为点A的横坐标为$\dfrac{3}{5}$，

所以$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，

所以$2\sin\alpha\cos\beta=2\times\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{32}{25}$.

第六章　三角函数性质

1．B

2．D

【分析】首先求函数$g(x)=3\cos\left(3x-\dfrac{11\pi}{12}\right)$，根据选项依次采用代入的方法，判断选项.

【详解】因为$g(x)=3\cos\left[3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=3\cos\left(3x-\dfrac{11\pi}{12}\right)$，所以$g(0)\neq0$，且$g(0)\neq\pm3$，所以函数是非奇非偶函数，故A，B项错误；

因为$g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3\cos\left(3\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{11\pi}{12}\right)=3\cos\dfrac{\pi}{12}$，既不是$g(x)$的最大值也不是最小值，所以$x=\dfrac{\pi}{3}$不是$g(x)$的对称轴，故C项错误；

因为$g\left(\dfrac{5\pi}{36}\right)=3\cos\left(3\times\dfrac{5\pi}{36}-\dfrac{11\pi}{12}\right)=3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，所以$\left(\dfrac{5\pi}{36},0\right)$是$g(x)$的一个对称中心，故D项正确.

故选：D.

3．A

【分析】由函数周期可求出ω，又由特殊值$f(\dfrac{5\pi}{12})=0$和$f(0)=1$，可求得φ和A，进而可得$f(x)$的解析式，再利用$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换规律，求得$g(x)$的解析式.

【详解】依题意有$\dfrac{2\pi}{\omega}=2\times\left(\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\pi$，得$\omega=2$，

又 $f(\frac{5\pi}{12})=A\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$ ，所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in Z$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

又 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{6}=1$，得 $A=2$，

所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $g\left(x\right)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos 2x$.

故选：A.

4．A

【分析】由充分条件必要条件的定义，结合三角函数的性质，作出判断.

【详解】当 $\sin x_0=0$ 时， $x_0=k\pi,k\in Z$，此时 $\tan x_0=0, y=\tan x$ 的图像关于 $\left(x_0,0\right)$ 中心对称，

当函数 $y=\tan x$ 的图像关于 $\left(x_0,0\right)$ 中心对称时， $x_0=\frac{k}{2}\pi,k\in Z$，此时 $\sin x_0$ 不一定为 0.

所以“$\sin x_0=0$”是“函数 $y=\tan x$ 的图像关于 $\left(x_0,0\right)$ 中心对称”的充分不必要条件.

故选：A.

5．C

【分析】由 f（x）是偶函数及 $0\le\varphi\le\pi$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.由图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称，且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数，结合 $\omega>1$ 及余弦函数的图象与性质可求 ω.

【详解】解：由 f（x）是偶函数，$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$，

∵$0\le\varphi\le\pi$，∴当 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

∴f（x）$=\sin$（$\omega x+\frac{\pi}{2}$）$=\cos\omega x$，

∵f（x）图象上的点关于 $M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称，

∴ $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}\omega=0$，故 $\frac{3\pi}{4}\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$，

即 $\omega=\frac{2}{3}\left(2k+1\right)$， $k\in\mathbf{Z}$.

∵f（x）在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数，可得 $\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\omega}$，即 $\omega\le2$.

又∵ $\omega=\frac{2}{3}\left(2k+1\right),k\in\mathbf{Z}$，$\omega>1$,

∴当 $k=1$ 时可得 $\omega=2$.

故选：C.

6．BD

【分析】利用正余弦函数的单调性可得出每个选项中两个三角函数值的大小，即可选出答案.

【详解】因为$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{8}<-\frac{\pi}{10}<0$，且函数$y=\sin x$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递增，则$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$，故选项A错误；

因为$\cos400^{\circ}=\cos40^{\circ},\cos\left(-50^{\circ}\right)=\cos50^{\circ}$，且函数$y=\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，则$\cos40^{\circ}>\cos50^{\circ}$，

即$\cos400^{\circ}>\cos\left(-50^{\circ}\right)$，故选项B正确；

因为$\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{8}<\frac{8\pi}{7}<\frac{3\pi}{2}$，且函数$y=\sin x$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，则$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)>\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$，故选项C错误；

因为$\frac{\pi}{2}<2<3<\frac{3\pi}{2}$，且函数$y=\sin x$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，则$\sin3<\sin2$，故选项D正确.

故选：BD

7．BD

【分析】A选项，利用整体法，结合函数图象得到$f\left(x\right)$的最小值为-1，A错误；

B选项，求出$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，从而确定B正确；

C选项，将$x=\frac{\pi}{8}$代入，可得到$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{8},1\right)$中心对称，C错误；

D选项，$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，求出$f\left(x\right)$的最大值和最小值，确定值域.

【详解】当$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，即$x=k\pi-\frac{\pi}{8}$，$k\in Z$时，$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$取得最小值，最小值为$-2+1=-1$，A错误；

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，故$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，则$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$在$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，故B正确；

当$x=\frac{\pi}{8}$时，$f(\frac{\pi}{8})=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)+1=1$，故$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{8},1\right)$中心对称，C错误；

$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，当$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，即$x=\frac{\pi}{4}$或$\frac{\pi}{2}$时，

$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$取得最小值，最小值为$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\sqrt{2}+1$，

当$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{3\pi}{8}$时，$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$取得最大值，最大值为$2\times1+1=3$，

故值域为$\left[\sqrt{2}+1,3\right]$，D正确.

故选：BD

8．BC

【分析】确定$g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$得到A错误，计算$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$得到B正确，$x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，函数单调递增，C正确，计算共有9个根，D错误，得到答案.

【详解】$g(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)\le g\left(\frac{\pi}{4}\right)$，故$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\omega\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1$，

故$2\omega\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，故$\omega=\frac{1}{2}+4k$，$k\in Z$，

$\omega\in(0,2)$，故 $k=0$ 时，$\omega=\frac{1}{2}$ 满足，故 A 错误；

$g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0$，B 正确；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，函数 $g(x)$ 单调递增，C 正确；

$g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$，

当 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，即 $x=2k\pi$ 时，$k\in Z$，$2\pi,4\pi,6\pi,8\pi$ 是方程得到解；

当 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，即 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$k\in Z$，$\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{13\pi}{2},\frac{17\pi}{2}$ 是方程的解.

综上所述：共有 9 个解，D 错误.

故选：BC

9．$\frac{2}{3}$

【分析】根据正弦函数周期公式求解即可.

【详解】由题意可得 $T=\frac{2\pi}{3\omega}=\pi$，解得 $\omega=\frac{2}{3}$，

故答案为：$\frac{2}{3}$.

10．$\frac{17}{8}$

【分析】利用三角函数的基本关系式将 $f(x)$ 化为关于 $\cos x$ 的二次函数，从而利用配方法即可得解.

【详解】因为 $f(x)=2\sin^2x-3\cos x-1=2\left(1-\cos^2x\right)-3\cos x-1=-2\cos^2x-3\cos x+1=-2\left(\cos x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$，

又 $-1\le\cos x\le1$，所以当 $\cos x=-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)_{\max}=\frac{17}{8}$.

故答案为：$\frac{17}{8}$.

11．$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）

【分析】先求出 $f(x)$ 与 x 轴的所有交点，再结合题意得到 $\left|\frac{\varphi}{2}\right|\le\left|\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi\right|$ 恒成立，整理得 $k\left(\varphi+\frac{k}{2}\pi\right)\ge0$，分类讨论 $k\ge1$，$k\le-1$ 与 $-1<k<1$ 三种情况，结合恒成立可得到 $0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$，从而得解.

【详解】因为 $f(x)=\sin(2x-\varphi)(\varphi>0)$，

令 $f(x)=0$，即 $\sin(2x-\varphi)=0$，得 $2x-\varphi=k\pi,k\in Z$，即 $x=\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi,k\in Z$，则 $f(x)$ 图象与 x 轴的所有交点为 $\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi,0\right),k\in Z$，

因为其中点 $\left(\frac{\varphi}{2},0\right)$ 离原点最近，所以 $\left|\frac{\varphi}{2}\right|\le\left|\frac{\varphi}{2}+\frac{k}{2}\pi\right|,k\in Z$ 恒成立，

不等式两边平方整理得$k\left(\varphi+\frac{k}{2}\pi\right)\geq 0$，

当$k\geq 1$时，$\varphi+\frac{k}{2}\pi\geq 0$，因为$\varphi>0$，故$\varphi+\frac{k}{2}\pi\geq 0$恒成立；

当$k\leq -1$时，$\varphi+\frac{k}{2}\pi\leq 0$，即$\varphi\leq -\frac{k}{2}\pi$恒成立，因为$-\frac{k}{2}\pi\geq\frac{\pi}{2}$，则$\varphi\leq\frac{\pi}{2}$，故$0<\varphi\leq\frac{\pi}{2}$；

当$-1<k<1$，即$k=0$时，显然上述不等式恒成立，

综上，由于上述分类情况要同时成立，故$0<\varphi\leq\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi$可以等于$\frac{\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）.

12.【答案】解：(1)由图可得$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}$，即$\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{3\pi}{4}$，得$\omega\ =2$，

$\therefore\cos(2\cdot\frac{\pi}{12}+\varphi)=1$，$\therefore\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$，$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$.

(2) $\because x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，$\therefore f(x)\in[-\frac{1}{2},1]$，

令$t=f(x)\in[-\frac{1}{2},1]$，则由题意得$g(t)=t^2-mt-1\leq 0$恒成立，

结合二次函数图像可知只需$g(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}m-1\leq 0$，且$g(1)=-m\leq 0$，

解得 $0\leq m\leq\frac{3}{2}$.

(3)由题意可得$y=f(x)$的图像与直线$y=a$在$[0,n\pi]$上恰有 2021 个交点.

在$[0,\pi]$上，$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$，

①当$a>1$ 或$a<-1$ 时，$y=f(x)$的图像与直线$y=a$在$[0,n\pi]$上无交点.

②当$a=1$ 或$a=-1$ 时，$y=f(x)$的图像与直线$y=a$在$[0,\pi]$仅有一个交点，

此时$y=f(x)$的图像与直线$y=a$在$[0,n\pi]$上恰有 2021 个交点，则$n=2021$·

③当$-1<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$ 时，$y=f(x)$的图象与直线$y=a$在$[0,\pi]$恰有 2 个交点，

此时$y=f(x)$的图像与直线$y=a$在$[0,n\pi]$上有偶数个交点，不可能有 2021 个交点.

④当$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$y=f(x)$的图像与直线$y=a$在$[0,\pi]$恰有 3 个交点

此时$n=1010$，才能使$y=f(x)$的图像与直线$y=a$在$[0,n\pi]$上有 2021 个交点.

综上可得，当$a=1$ 或$a=-1$ 时，$n=2021$;当$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$n=1010$.

复习题一

1．B　2．C　3．C　4．C　5．A　6．D　7．C

8．D　解：因为$f\left(x-1\right)=f\left(x+1\right)$，所以$f\left(x\right)$的周期为 2，

又因为$f\left(x\right)$为奇函数，$f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，

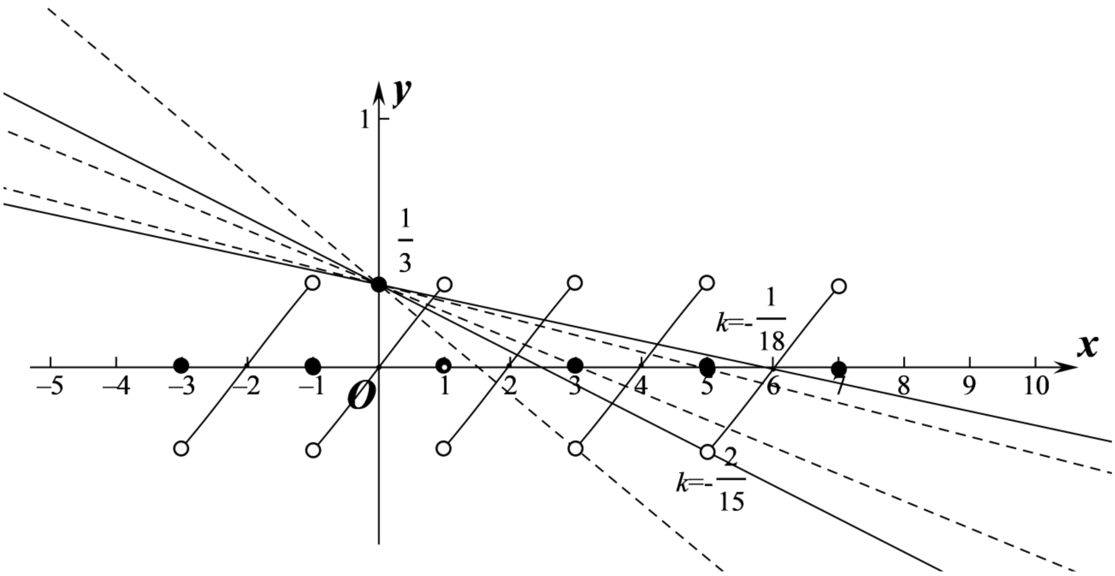
令$x=1$，得$f\left(1\right)=-f\left(-1\right)$，又$f\left(-1\right)=f\left(1\right)$，所以$f\left(1\right)=f\left(-1\right)=0$，

当$x\in\left(-1,1\right)$时，$f\left(x\right)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，

由$y=\dfrac{2}{2^x+1}$单调递减得函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,1\right)$上单调递增，

所以$f\left(-1\right)<f\left(x\right)<f\left(1\right)$，得$-\dfrac{1}{3}<f\left(x\right)<\dfrac{1}{3}$，

作出函数图象如图所示，



由图象可知当$y=kx+\dfrac{1}{3}$过点$\left(5,-\dfrac{1}{3}\right)$时，$k=-\dfrac{2}{15}$，此时在$\left(-1,6\right)$上只有 3 个零点.

当$y=kx+\dfrac{1}{3}$经过点$\left(3,0\right)$时，$k=-\dfrac{1}{9}$，此时有 5 个零点.

当$-\dfrac{2}{15}<k<-\dfrac{1}{9}$时，有 4 个零点.

当$y=kx+\dfrac{1}{3}$经过点$\left(5,0\right)$时，$k=-\dfrac{1}{15}$，此时有 5 个零点.

当$-\dfrac{1}{9}<k<-\dfrac{1}{15}$时，有 4 个零点.

当$y=kx+\dfrac{1}{3}$经过点$\left(6,0\right)$时，$k=-\dfrac{1}{18}$，此时在$\left(-1,6\right)$上只有 3 个零点.

当$-\dfrac{1}{15}<k<-\dfrac{1}{18}$时，有 4 个零点.

所以当$k\in\left(-\dfrac{2}{15},-\dfrac{1}{18}\right)$时，函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-kx-\dfrac{1}{3}$在$\left(-1,6\right)$上有 4 个或 5 个零点.

故选：D

9．BC　　10．BC

11．BD 解：因为$a>b>0$，且$a+b=1$，所以$0<b<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a<1$，

A 选项，构造$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，$0<x<1$，

则$f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，因为$0<x<1$，所以$f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$恒成立，

所以$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$在$0<x<1$上单调递增，

所以$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$，即$b\ln a>a\ln b$，A 错误；

B 选项，因为$\frac{b}{a}>0,\frac{a}{b}>0$，

由基本不等式得：$\frac{2}{a}+\frac{a}{b}=\frac{2a+2b}{a}+\frac{a}{b}=2+\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2+2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=2-\sqrt{2},b=\sqrt{2}-1$时，等号成立，

所以$\frac{2}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{2}$，B 正确；

C 选项，因为$a+b=1$，所以

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=a^2b^2+a^2+b^2+1=a^2b^2+\left(a+b\right)^2-2ab+1=a^2b^2-2ab+2$$

$$=\left(ab-1\right)^2+1，$$

其中$ab\leq\frac{\left(a+b\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$，当且仅当$a=b$时，等号成立，

但$a>b>0$，故等号取不到，$0<ab<\frac{1}{4}$，

故$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=\left(ab-1\right)^2+1\in\left(\frac{25}{16},2\right)$，C 错误；

D 选项，因为$a+b=1$，所以

$$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{\left[\left(a+2\right)-2\right]^2}{a+2}+\frac{\left[\left(b+1\right)-1\right]^2}{b+1}=\left(a+2\right)+\frac{4}{a+2}-4+\left(b+1\right)+\frac{1}{b+1}-2$$

$$=\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}-2，$$

因为$a+b=1$，所以$a+2+b+1=4$，故$\frac{a+2}{4}+\frac{b+1}{4}=1$，

其中$\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}=\left(\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}\right)\cdot\left(\frac{a+2}{4}+\frac{b+1}{4}\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{b+1}{a+2}+\frac{a+2}{4\left(b+1\right)}$

$$\geq\frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{b+1}{a+2}\cdot\frac{a+2}{4\left(b+1\right)}}=\frac{9}{4}，$$

当且仅当$\frac{b+1}{a+2}=\frac{a+2}{4\left(b+1\right)}$，即$a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$时，等号成立，

所以$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}-2\geq\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$，D 正确.

故选：BD

12．AD 解：对于$x_0\in R$，令$x_n=f(x_{n-1})(n=1$，2，3，…)，

若存在正整数k使得$x_k=x_0$，且当$0<j<k$时，$x_j\neq x_0$，

则称x_0是$f(x)$的一个周期为k的周期点.

对于①，若x_0为$f\left(x\right)$周期为 1 的周期点，

$e^{x_0-1}=f(x_0)=x_0\Leftrightarrow x_0=1$，故 A 正确；

对于②，若x_0为$f\left(x\right)$周期为 2 的周期点，

则$x_0=f(x_1)=2(1-x_1)=2[1-f(x_0)]=4x_0-2$

解得，$x_0=\frac{2}{3}$，

但$x_0=f(x_0)=2(1-x_0)$，解得$x_0=\frac{2}{3}$

所以$f(x)$不存在在周期为 2 的周期点，故 B 错误；

对于③， 当$k=1$时，易见有两个周期点$0,\frac{2}{3}$；

当$k=2$时，$f_2\left(x\right)=\begin{cases}2\cdot 2x,0\leq 2x\leq\frac{1}{2}\\ 2\left(2-2x\right),0\leq 2-2x\leq\frac{1}{2}\\ 2-2\cdot 2x,\frac{1}{2}\leq 2x\leq 1\\ 2-2\left(2-2x\right),\frac{1}{2}\leq 2-2x\leq 1\end{cases}$

即$f_2\left(x\right)=\begin{cases}4x,0\leq x\leq\frac{1}{4}\\ 4-4x,\frac{3}{4}\leq 2-2x\leq 1\\ 2-4x,\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 4x-2,\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}\end{cases}$，可得$k=2$时，周期点有 4 个，$0,\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{3}$;

同理，$k=3$时，周期点有 8 个，$0,\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{6}{7},\frac{4}{7},\frac{2}{7}$;故③错误；

对于④，$f(x)=x(1-x)=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，所以$f(x)\bullet\frac{1}{4}$，即$f(x)<\frac{1}{2}$，

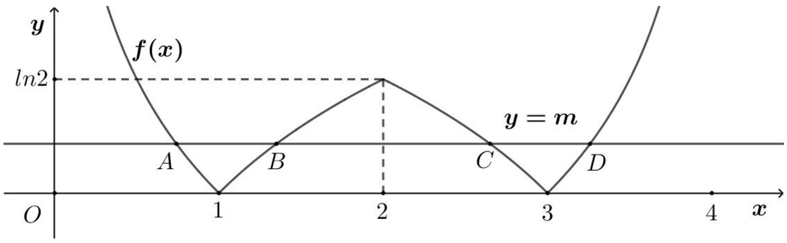
所以$\frac{1}{2}$不是周期点，故 D 正确.

故选：AD.

13．150cm^2　　14．$f(x)=2\sin x$（答案不唯一）　15．$-\frac{1}{5}$

16．$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$　解：当 $2<x<4$ 时，$0<4-x<2$，

$\therefore f(x)=f(4-x)=|\ln(4-x)|$，$f(x)$ 如下图示：



$\therefore x_1$、x_2、x_3、x_4 对应 A、B、C、D 的横坐标，

由 $f(2)=\ln 2$，故 $0<m<\ln 2$，则 $x_1\cdot x_2=1$，$(4-x_3)\cdot(4-x_4)=1$，

$\therefore x_1^2+x_2^2\geq 2x_1\cdot x_2=2$，$x_3=4-x_2$，$x_4=4-x_1$，

由分离参数得：$k\geq\frac{11-(x_1^2+x_2^2)}{x_3x_4-1}$，

设 $g(x)=\frac{11-(x_1^2+x_2^2)}{x_3x_4-1}=\frac{11-(x_1^2+x_2^2)}{(4-x_2)(4-x_1)-1}=\frac{13-(x_1+x_2)^2}{16-4(x_1+x_2)}$，

令 $x_1+x_2=t$，则 $2<x_1+x_2<\frac{5}{2}$，$t\in(2,\frac{5}{2})$，则 $g(t)=\frac{13-t^2}{16-4t}$，再令 $4-t=n$（$\frac{3}{2}<n<2$）

则 $g(n)=\frac{-n^2+8n-3}{n}=\frac{1}{4}(-n-\frac{3}{n}+8)=-\frac{1}{4}(n+\frac{3}{n})+2$，

$\therefore n+\frac{3}{n}\geq 2\sqrt{3}$（当且仅当 $n=\sqrt{3}$ 时取“=”），

$\therefore g(n)\leq 2-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $g(x)\leq 2-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore k\geq 2-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即实数 k 的最小值为 $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17.【详解】（1）$f(\alpha)=\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$

$$=\frac{\sin(-\alpha)(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)\cos\left[6\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}{(-\cos\alpha)\sin(\pi-\alpha)\left[-\sin(\pi+\alpha)\right]\sin\left[4\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}$$

$$=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}{(-\cos\alpha)\sin\alpha\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{-\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{(-\cos\alpha)\sin^2\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{-\sin^2\alpha\cos\alpha(-\sin\alpha)}{(-\cos\alpha)\sin^2\alpha\cos\alpha}$$

$$=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

（2）因为角α的终边在直线$y=-3x$上，

所以可设角α的终边上任一点为$P(k,-3k)$ $(k\neq0)$，

则$x=k, y=-3k$，$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{k^2+9k^2}=\sqrt{10}\,|k|$，

当$k>0$时，$r=\sqrt{10}k$，

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3k}{\sqrt{10}k}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{x}{r}}=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{10}k}{k}=\sqrt{10}$，

所以$10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=10\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)+3\sqrt{10}=0$，

当$k<0$时，$r=-\sqrt{10}k$，

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3k}{-\sqrt{10}k}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{x}{r}}=\frac{r}{x}=\frac{-\sqrt{10}k}{k}=-\sqrt{10}$，

所以$10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=10\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-3\sqrt{10}=0$，

综上所述：$10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=0$.

18.【详解】(1）因为函数$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$在$[1,2]$上为单调函数，

所以$a+a^2=12$，解得$a=3$或$a=-4$．因为$a>0$且$a\neq1$，所以$a=3$；

（2）由（1）得，$f(x)=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}$，所以

$$f(x)+f(1-x)=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}+\frac{3^{1-x}}{3^{1-x}+\sqrt{3}}=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}+\frac{3}{3+\sqrt{3}\times3^x}=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3^x}=1;$$

（3）由（2）得，$1-f(x)=f(1-x)$，且$f(x)>0$，所以$2f^2(x)<1-f(1-x)=f(x)$，

所以 $f(x)<\frac{1}{2}$，所以$\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}<\frac{1}{2}$，整理得，$3^x<\sqrt{3}$，解得$x<\frac{1}{2}$，

所以原不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

19.【详解】(1）证明：令$x=y=1$可得$f(1)=2f(1)$，所以，$f(1)=0$，

令$y=\frac{1}{x}$，则$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=0$，$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，

所以，$\forall x$、$y\in D$，$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

（2）解：令 $x=y=-1$ 可得 $f(1)=2f(-1)$，$\therefore f(-1)=0$，

$\forall x\in D$，令 $y=-1$，则 $f(-x)=f(x)+f(-1)=f(x)$，

所以，函数 $f(x)$ 为 D 上的偶函数，

任取 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1>x_2$，则 $\frac{x_1}{x_2}>1$，

所以，$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)+f\left(\frac{1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

由 $f(1-2x)<-2$ 可得 $f(1-2x)+2=f(1-2x)+f(-2)+f(-2)=f(1-2x)+f(4)=f(4-8x)<0=f(1)$，

即 $f(|4-8x|)<f(1)$，则 $\begin{cases}|4-8x|<1\\1-2x\neq 0\end{cases}$，解得 $\frac{3}{8}<x<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{8}$.

因此，原不等式的解集为 $\left(\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)$.

20.【详解】（1）对于函数模型 $y=\lg x+kx+1$（k 为常数），

当 $x=100$ 时，$y=5$，代入得，$5=\lg 100+100k+1$

解得 $k=\frac{1}{50}$，即 $y=\lg x+\frac{1}{50}x+1$，

因为函数 $y=\lg x$ 和函数 $y=\frac{1}{50}x+1$ 在 $[50,200]$ 上都为增函数

所以函数 $y=\lg x+\frac{1}{50}x+1$ 在 $[50,200]$ 上都为是增函数，

当 $x=200$ 时，$y=\lg 200+4+1=\lg(2\times 100)+5=\lg 2+7\approx 7.30$，

所以业绩 200 万元的业务员可以得到 7.3 万元奖励.

（2）对于函数模型 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-(a-0.05)x+100a-8000$，

因为函数 $f(x)$ 在 $[50,200]$ 递增，所以 $-\frac{-(a-0.05)}{2\times\frac{1}{4}}\leq 50$，即 $a\leq 25.05$；

又由奖金不超过业绩值得 5%，得

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-(a-0.05)x+100a-8000\leq x\cdot 5\%$ 恒成立，

即 $\frac{1}{4}x^2-ax+100a-8000\leq 0$ 对 $x\in[50,200]$ 恒成立.

记 $g(x)=\frac{1}{4}x^2-ax+100a-8000$，

因为二次函数 $g(x)$ 图象开口向上且 $a\leq 25.05$，所以函数 $g(x)$ 图象的对称轴 $x=2a\leq 50.1$，

所以只需$g(x)_{\max}=g(200)\le 0$，即$10000-200a+100a-8000\le 0$

解得$a\ge 20$．所以$20\le a\le 25.05$

综上可知，实数a的取值范围是$\left[20,25.05\right]$．

21．【详解】（1）由于函数$f\left(x\right)$图象上两相邻对称轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$，

所以$f\left(x\right)$的最小正周期$T=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$,故$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，

此时$f\left(x\right)=A\sin\left(2x+\varphi\right)$．

选条件①②：

因为$f\left(x\right)$的最小值为$-A$，所以$A=2$．

因为$f\left(x\right)$图象的一个对称中心为$(\dfrac{5\pi}{12},0)$，所以$2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi(k\in Z)$，

所以$\varphi=k\pi-\dfrac{5\pi}{6},k\in Z$，

因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，所以$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$．

选条件①③：

因为$f\left(x\right)$的最小值为$-A$，所以$A=2$．

因为函数$f\left(x\right)$的图象过点$(\dfrac{5\pi}{6},-1)$，

即$f(\dfrac{5\pi}{6})=-1$，即$2\sin(\dfrac{5\pi}{3}+\varphi)=-1,\sin(\dfrac{5\pi}{3}+\varphi)=-\dfrac{1}{2}$，

因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，以$\dfrac{7\pi}{6}<\varphi+\dfrac{5\pi}{3}<\dfrac{13\pi}{6}$，所以$\varphi+\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{11\pi}{6}$

则$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，所以$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$．

选条件②③：

因为函数$f\left(x\right)$的一个对称中心为$(\dfrac{5\pi}{12},0)$，所以$2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi(k\in Z)$，

所以$\varphi=k\pi-\dfrac{5\pi}{6},k\in Z$．

因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，此时$k=1$．

所以$f(x)=A\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，

因为函数$f\left(x\right)$的图象过点$(\dfrac{5\pi}{6},-1)$，

所以$f(\dfrac{5\pi}{6})=-1$,即$A\sin(\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6})=-1$,即$A\sin\dfrac{11\pi}{6}=-1$,

所以$A=2$，所以$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$．

（2）因为$x\in[0,a]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6}\right]$，

函数$f\left(x\right)$在区间$[0,a]$上的最小值为-2，

则$2a+\frac{\pi}{6}\geq\frac{3\pi}{2}$ ，即$a\geq\frac{2\pi}{3}$，

所以 a 的取值范围为 $[\frac{2\pi}{3},+\infty)$.

22.【详解】(1) 已知函数$f\left(x\right)$与$h\left(x\right)$有相同的定义域，

所以$f\left(x\right)$与$h\left(x\right)$的定义域都是$\left(0,+\infty\right)$.

方程$2x^2-x+k=0$的判别式$\Delta=1-8k$.

①当$\Delta=1-8k<0$即$k>\frac{1}{8}$时，$f\left(x\right)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立.

②当$\Delta=1-8k=0$即$k=\frac{1}{8}$时，$f\left(x\right)=0$的根为$x=\frac{1}{4}$，

所以$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|x>0\text{ 且 }x\neq\frac{1}{4}\right\}$.

③当$\Delta=1-8k>0$即$k<\frac{1}{8}$时，$f\left(x\right)=0$的两根为$x_1=\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}$，

若$0<k<\frac{1}{8}$，则$0<x_1<x_2$，

所以$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|0<x<x_1\text{ 或 }x>x_2\right\}$；

若$k\leq0$，则$x_1\leq0<x_2$，所以$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|x>x_2\right\}$.

综上所述：

当$k\leq0$时，$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|x>\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}\right\}$；

当$0<k<\frac{1}{8}$时，$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|0<x<\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}\text{ 或 }x>\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}\right\}$；

当$k=\frac{1}{8}$时，$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|x>0\text{ 且 }x\neq\frac{1}{4}\right\}$；

当$k>\frac{1}{8}$时，$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|x>0\right\}$.

（2）由（1）知，若方程$f\left(x\right)=0$有两个相异实数根$x_1,x_2\left(0<x_1<x_2\right)$，

则$0<k<\frac{1}{8}$，且$x_1+x_2=\frac{1}{2}$，$x_1x_2=\frac{1}{2}k$，

因为$h\left(x\right)$在$\left[x_1,x_2\right]$上是减函数，所以$h\left(x_1\right)>h\left(x_2\right)$，

所以$\left|h\left(x_1\right)-h\left(x_2\right)\right|=h\left(x_1\right)-h\left(x_2\right)=\left(x_1{}^2-x_1+k\ \ln x_1\right)-\left(x_2{}^2-x_2+k\ \ln x_2\right)$

$=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2-1\right)+k\left(\ln x_1-\ln x_2\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(x_1-x_2\right)+k\ln\frac{x_1}{x_2}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}-\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}\right)+k\ln\frac{x_1}{x_2}$

$=\frac{\sqrt{1-8k}}{4}+k\ln\frac{x_1}{x_2}$.

因为 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<x-1$，

又因为 $0<x_1<x_2$，所以 $0<\frac{x_1}{x_2}<1$.

因为 $\frac{x_1}{x_2}-1=\frac{\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}}{\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}}-1=\frac{2-8k-2\sqrt{1-8k}}{8k}-1$

$=\frac{1-4k-\sqrt{1-8k}}{4k}-1=\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4k}-2$，

且 $0<k<\frac{1}{8}$，

所以 $k\ln\frac{x_1}{x_2}<k\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)=\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}-2k$.

所以 $\left|h\left(x_1\right)-h\left(x_2\right)\right|<\frac{\sqrt{1-8k}}{4}+\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}-2k=\frac{1}{4}-2k$

所以 $\left|h\left(x_1\right)-h\left(x_2\right)\right|<\frac{1}{4}-2k$.

复习题二

1．D　2．A　3．B　4．D　5．A　6．A　7. A　8．C

9．ABD　10．AC　11．ABC　12．BD

13．4　14．0　15．$\frac{1}{3}\le x\le 1$　16．$4+4\sqrt{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【详解】（1）当 $m=2$ 时，$A=\left\{x\middle|m-1\le x\le 2m+3\right\}=\left\{x\middle|1\le x\le 7\right\}$，

由 $\frac{8}{x-1}<1$ 得 $\frac{8}{x-1}-1<0$，即 $\frac{9-x}{x-1}<0$，故 $\frac{x-9}{x-1}>0$，即 $(x-9)(x-1)>0$，解得 $x<1$ 或 $x>9$，故 $B=\left\{x\middle|x<1\text{或}x>9\right\}$，

所以 $A\cup B=\left\{x\middle|x\le 7\text{或}x>9\right\}$，$\complement_R A=\left\{x\middle|x<1\text{或}x>7\right\}$，

故 $\left(\complement_R A\right)\cap B=\left\{x\middle|x<1\text{或}x>9\right\}$.

（2）因为 $A\cap B=A$，所以 $A\subseteq B$，

当 $A=\varnothing$ 时，$2m+3<m-1$，解得 $m<-4$；

当 $A\neq\varnothing$ 时，由数轴法得 $\begin{cases}m\geq -4\\ 2m+3<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\geq -4\\ m-1>9\end{cases}$，即 $\begin{cases}m\geq -4\\ m<-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\geq -4\\ m>10\end{cases}$，

故 $-4\leq m<-1$ 或 $m>10$，综上：$m<-1$ 或 $m>10$，所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(10,+\infty)$.

18.【答案】(1)答案见解析(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【详解】(1) 由题意和同角三角函数基本关系式，有 $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$，

消去 $\sin\alpha$ 得 $5\cos^2\alpha-\sqrt{5}\cos\alpha-2=0$，解得 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

当角 α 是第一象限角时，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\tan\alpha=\frac{1}{2}$，

因为角 α 是第三象限角，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5},\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\tan\alpha=2$.

(2) 由题意可得 $f(\alpha)=\frac{-\sin\alpha\tan\alpha(-\cos\alpha)}{-\tan\alpha\sin\alpha}=-\cos\alpha$，

因为角 α 是第三象限角，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $f(\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19.【答案】(1) $a\in[1,4]$

(2)答案见解析.

【详解】(1) 因对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant-\frac{1}{4}$ 恒成立，则 $ax^2-(a+2)x+\frac{9}{4}\geq 0$ 对任意实数恒成立，得

$\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ (a+2)^2-9a\leq 0\end{cases}$，解得 $a\in[1,4]$.

(2) ①当 $a=0$ 时，$f(x)>0\Leftrightarrow -2x+2>0$，则对应解集为：$(-\infty,1)$.

②当 $a\neq 0$ 时，$f(x)>0\Leftrightarrow (ax-2)(x-1)>0\Leftrightarrow a\left(x-\frac{2}{a}\right)(x-1)>0$.

(1) 当 $\frac{2}{a}>1$，即 $0<a<2$ 时，$f(x)>0$ 的解集为：$(-\infty,1)\cup\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$.

(2) 当 $\frac{2}{a}=1$，即 $a=2$ 时，$f(x)>0\Leftrightarrow(x-1)^2>0$，对应解集为：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 当 $0<\frac{2}{a}<1$，即 $a>2$ 时，$f(x)>0$ 的解集为：$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)\cup(1,+\infty)$.

(4) 当 $\frac{2}{a}<0$，即 $a<0$ 时，$f(x)>0\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{a}\right)(x-1)<0$，对应解集为：$\left(\frac{2}{a},1\right)$.

综上：当 $a<0$ 时，解集为：$\left(\frac{2}{a},1\right)$；当 $a=0$ 时，解集为：$(-\infty,1)$；

当 $0<a<2$ 时，解集为：$(-\infty,1)\cup\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$；当 $a=2$ 时，解集为：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

当$a>2$时，解集为：$\left(-\infty,\dfrac{2}{a}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

20.【答案】(1)函数$f(x)$是偶函数(2)$[1,+\infty)$(3)$(1,2]$

【详解】（1）因为$f(x)=\log_a\dfrac{4^x+1}{2^x}(a>0$且$a\neq1)$，所以其定义域为R，

又$f(-x)=\log_a\dfrac{4^{-x}+1}{2^{-x}}=\log_a\dfrac{1+4^x}{2^x}=f(x)$,

所以函数$f(x)$是偶函数；

（2）当$a=2$时，$f(x)=\log_2\dfrac{4^x+1}{2^x}$，因为$2^x>0$,$\dfrac{4^x+1}{2^x}=2^x+\dfrac{1}{2^x}\geq2$,当且仅当$2^x=1$，即$x=0$时取等，

所以$f(x)=\log_2\dfrac{4^x+1}{2^x}\geq\log_2 2=1$,

所以函数$f(x)$的值域为$[1,+\infty)$.

（3）$\forall x_1\in[-4,4]$，$\exists x_2\in[0,4]$，使得$f(x_1)-g(x_2)\geq2$，等价于$[f(x)]_{\min}\geq[g(x)+2]_{\min}$，

令$t=\sqrt{x}$，$x\in[0,4]$，$t\in[0,2]$，

令$h(t)=t^2-2t+2$，则$g(x)+2$在$[0,4]$上的最小值等于$h(t)$在$[0,2]$上的最小值，

$h(t)$在$[0,1]$上单调递减，在$[1,2]$上单调递增，所以$h(t)$在$[0,2]$上的最小值为$h(1)=1$，所以$[f(x)]_{\min}\geq1$.

因为$f(x)$为偶函数，所以$f(x)$在$[-4,4]$上的最小值等于$f(x)$在$[0,4]$上的最小值，

设$v(x)=\dfrac{4^x+1}{2^x}$，则$f(x)=\log_a v(x)$，

任取$0\leq x_1<x_2\leq4$，

$v(x_1)-v(x_2)=\dfrac{4^{x_1}+1}{2^{x_1}}-\dfrac{4^{x_2}+1}{2^{x_2}}=(2^{x_1}-2^{x_2})(1-\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}})$，

因为$0\leq x_1<x_2\leq4$，所以$2^{x_1}<2^{x_2}$，$2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$x_1+x_2>0$，$2^{x_1+x_2}>1$，$1-\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}}>0$，

所以$(2^{x_1}-2^{x_2})(1-\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}})<0$，$v(x_1)<v(x_2)$，

所以$v(x)=\dfrac{4^x+1}{2^x}$在$[0,4]$上为单调递增函数，

当$0<a<1$时，函数$f(x)=\log_a v(x)$在$[0,4]$上为单调递减函数，

所以$f(x)_{\min}=f(4)=\log_a\dfrac{4^4+1}{2^4}=\log_a\dfrac{257}{16}$，所以$\log_a\dfrac{257}{16}\geq1$，得$a\geq\dfrac{257}{16}$（舍）；

当$a>1$，函数$f(x)=\log_a v(x)$在$[0,4]$上为单调递增函数，

所以$f(x)_{\min}=f(0)=\log_a 2$，所以$\log_a 2\geq1$，$1<a\leq2$.综上得：实数$a$的取值范围为$(1,2]$.

21.【答案】(1)$x_1=\dfrac{4\pi}{3}$，$y_2=-\sqrt{3}$，函数$f(x)$的解析式为$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；(2)$\left(\sqrt{3}-2,\dfrac{\sqrt{6}}{2}+2\right)$；

(3)$a=2$，$F(x)$在$(0,2019\pi)$共有3029个不同的零点.

【详解】（1）由“五点法”及表格数据分析可得：$A=\sqrt{3}$.所以 $y_2=-\sqrt{3}$.

由 $\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{3}\times\omega+\varphi=0\\ \dfrac{\pi}{3}\times\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}\omega=\dfrac{1}{2}\\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，

所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

由 $\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{\pi}{3}=\pi$，解得：$x_1=\dfrac{4\pi}{3}$.

综上所述：$x_1=\dfrac{4\pi}{3}$，$y_2=-\sqrt{3}$，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

（2）由（1）知 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位，得到 $y=\sqrt{3}\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}$，

再把所得图象上各店的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，所以 $g(x)=\sqrt{3}\sin x$.

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$t=g(x)=\sqrt{3}\sin x\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$.

因为$|g(x)-m|<2$ 在$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上恒成立，所以$|t-m|<2$ 在 $t\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$上恒成立，

所以$|m-t|<2$ 在 $t\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$ 上恒成立，

所以 $t-2<m<t+2$ 在 $t\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$ 上恒成立，

所以 $\sqrt{3}-2<m<\dfrac{\sqrt{6}}{2}+2$.

即实数 m 的取值范围为$\left(\sqrt{3}-2,\dfrac{\sqrt{6}}{2}+2\right)$.

（3）由（2）可知：$F(x)=3\sin^2x+a\sin x-1$，$F(x)$ 周期为 $T=2\pi$.

当 $x\in(0,2\pi]$ 时,令 $t=\sin x$,考虑方程 $3t^2+at-1=0$ 的根的情况：

因为 $\Delta=a^2+12>0$，所以方程 $3t^2+at-1=0$ 在 R 上必有两个不同的实数根 $t=t_1,t=t_2,t_1<t_2$.

因为 $F(x)$ 在 $(0,2019\pi)$ 有奇数个零点,所以 $t_1\in[-1,1]$ 或 $t_2\in[-1,1]$.

①若 $-1<t_1<t_2<1$，则方程 $t_1=\sin x,t_2=\sin x$ 在 $(0,2\pi]$ 共有 4 个不同的实数根,在 $(0,\pi)$ 有 0 个或 2 个实数根.

所以 $F(x)=0$ 在 $(0,2019\pi)$ 有 $\dfrac{2019-1}{2}\times4=4036$ 个根或 $\dfrac{2019-1}{2}\times4+2=4038$ 个根，与 $F(x)$ 有奇数个零点相矛盾，舍去；

②若 $t_1\in(-1,1),t_2\notin[-1,1]$，则 $t_1=\sin x$ 在在 $(0,2\pi]$ 共有 2 个不同的实数根，在 $(0,\pi)$ 有 0 个或 2 个实数根.

所以$F(x)=0$在$(0,2019\pi)$有$\dfrac{2019-1}{2}\times 2=2018$个根或$\dfrac{2019-1}{2}\times 2+2=2020$个根，与$F(x)$有奇数个零点相矛盾，舍去.

同理：$t_2\in(-1,1),t_1\notin[-1,1]$也不符合题意，舍去.

所以$t_1=-1$或$t_2=1$

③若$t_2=1$,则$a=-2$,方程$3t^2+at-1=0$的根$t_1=-\dfrac{1}{3},t_2=1$.

方程$-\dfrac{1}{3}=\sin x,1=\sin x$在$(0,2\pi]$共有 3 个不同的实数根,而在$(0,\pi)$上$-\dfrac{1}{3}=\sin x$无解，$1=\sin x$有一个不同的根, ,

所以$F(x)=0$在$(0,2019\pi)$在$\left(\dfrac{2019-1}{2}\right)\times 3+1=3028$个根，与$F(x)$有奇数个零点相矛盾，舍去.

④若$t_1=-1$,则$a=2$,此时$3t^2+at-1=0$的根为$t_2=\dfrac{1}{3},t_1=-1$.

方程$\dfrac{1}{3}=\sin x,-1=\sin x$在$(0,2\pi]$共有 3 个不同的实数根,而在$(0,\pi)$上$\dfrac{1}{3}=\sin x$有两个不同的根，$-1=\sin x$无解,

所以$F(x)=0$在$(0,2019\pi)$在$\left(\dfrac{2019-1}{2}\right)\times 3+2=3029$个根，符合题意.

综上所述： $a=2$，$F(x)$在$(0,2019\pi)$共有3029个不同的零点.

22.【答案】(1)-1和 3(2)$5<m\le\dfrac{11}{2}$(3)$m\in(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$

【详解】(1）当$a=1,b=-2$时,$f(x)=x^2-x-3$

令$f(x)=x$,可得$x^2-x-3=x$即$x^2-2x-3=0$

解得$x=3$或$x=-1$

当$a=1,b=-2$时,$f(x)$关于参数 1 的不动点为-1和 3

（2）由已知得$x^2+3x+1=mx$在$x\in(0,2]$上有两个不同解,

即$x^2+(3-m)x+1=0$在$x\in(0,2]$上有两个不同解,

令$g(x)=x^2+(3-m)x+1$,

所以$\begin{cases} g(0)=1>0 \\ g(2)=11-2m\geq 0 \\ \Delta=(3-m)^2-4>0 \\ 0<\dfrac{m-3}{2}<2 \end{cases}$,

解得:$5<m\bullet\dfrac{11}{2}$.

（3）由题意知,函数$f(x)$有关于参数m的两个相异的不动点,

所以方程$f(x)=mx$,即$ax^2+(b+1-m)x+b-1=0(a\neq 0)$恒有两个不等实根,

则 $\Delta=(b+1-m)^2-4a(b-1)>0$,即 $\dfrac{(b+1-m)^2}{b-1}>4a$ 对于任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,总存在 $b\in[2,5]$ 使之成立,即

$\left[\dfrac{(b+1-m)^2}{b-1}\right]_{\max}>(4a)_{\max}$,即 $\left[\dfrac{(b+1-m)^2}{b-1}\right]_{\max}>4$

令 $h(b)=\dfrac{(b+1-m)^2}{b-1}=\dfrac{(b-1)^2+(4-2m)(b-1)+(m-2)^2}{b-1}=b-1+\dfrac{(m-2)^2}{b-1}+(4-2m)$，$b\in[2,5]$,

根据对勾函数性质，令 $b-1=\dfrac{(m-2)^2}{b-1}$，则 $b-1=|m-2|$，解得：$b=|m-2|+1$，

①当 $|m-2|+1\le 2$，即 $1\le m\le 3$ 时，函数 $h(b)$ 在 $[2,5]$ 单调递增，则

$h(b)_{\max}=h(5)=\dfrac{(6-m)^2}{4}>4$，解得：$m<2$ 或 $m>10$，综上：$1\le m<2$，

②当 $|m-2|+1\ge 5$，即 $m\le -2$ 或 $m\ge 6$ 时，函数 $h(b)$ 在 $[2,5]$ 单调递减，则

$h(b)_{\max}=h(2)=(3-m)^2>4$，解得：$m<1$ 或 $m>5$，综上：$m\le -2$ 或 $m\ge 6$，

③ $2<|m-2|+1<5$,即 $m\in(-2,1)\cup(3,6)$ 时，函数 $h(b)$ 在 $[2,5]$ 先减后增，

$h(b)_{\max}=\max\{h(5),h(2)\}$，令 $h(5)>h(2)$，解得：$m\in(-4,0)$，

1° 故 $m\in(-2,0)$ 时，$h(b)_{\max}=h(5)>4$，结合①得：$m\in(-2,0)$

2° 故 $m\in[0,1)\cup(3,6)$ 时，$h(b)_{\max}=h(2)>4$，结合②得：$m\in[0,1)\cup(5,6)$，综上：$m\in(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$