

## 第一部分 三角函数

### 一、单选题

- 已知  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ , 则  $\cos 2\alpha$  等于 ( )  
 A.  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       C.  $\frac{1}{9}$       D.  $-\frac{1}{9}$
- 如果  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 且  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , 那么  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )  
 A.  $\frac{4\sqrt{2}}{5}$       B.  $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$       C.  $\frac{3\sqrt{2}}{5}$       D.  $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$
- 为了得到函数  $y = \sin 2x$  的图像, 只需将函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图像 ( )  
 A. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位    B. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位    C. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位    D. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位
- 函数  $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\lg(\sin x)}$  的定义域是 ( )  
 A.  $[-4, 4]$       B.  $\left[-4, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 4\right]$     C.  $[-4, -\pi) \cup (0, \pi)$     D.  $[-4, -\pi) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
- 将函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象向左平移  $m(m > 0)$  个单位长度, 得到函数  $y = f(x)$  图象在区间  $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$  上单调递减, 则  $m$  的最小值为 ( )  
 A.  $\frac{\pi}{12}$       B.  $\frac{\pi}{6}$       C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{3}$
- 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 在区间  $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  上恰有 3 个零点, 则  $\omega$  的取值范围是 ( )  
 A.  $\left[\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right] \cup \left(4, \frac{14}{3}\right)$       B.  $\left[\frac{11}{3}, 4\right] \cup \left(\frac{14}{3}, \frac{17}{3}\right)$   
 C.  $\left[\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right) \cup \left(5, \frac{17}{3}\right)$       D.  $\left[\frac{14}{3}, 5\right] \cup \left(\frac{17}{3}, \frac{20}{3}\right)$

### 二、多选题

- 关于函数  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{13}{4}\pi\right)$  的图象, 下列说法正确的是 ( )  
 A.  $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$  是曲线  $y = f(x)$  的一个对称中心  
 B.  $x = \frac{5\pi}{8}$  是曲线  $y = f(x)$  的一条对称轴  
 C. 曲线  $y = 2\sin 2x$  向左平移  $\frac{5}{8}\pi$  个单位, 可得曲线  $y = f(x)$   
 D. 曲线  $y = 2\sin 2x$  向右平移  $\frac{5}{8}\pi$  个单位, 可得曲线  $y = f(x)$
- 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$ , 则下列结论正确的是 ( )  
 A.  $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$       B. 当且仅当  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时, 函数  $f(x)$  取得最大值  
 C.  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$       D.  $f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上恰有 3 个零点



9. 把函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x$  ( $0 < \omega < \pi$ ) 的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 得到的函数图象恰好关于  $y$  轴对称,

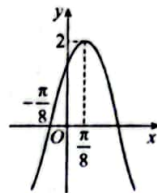
则下列说法正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$       B.  $f(x)$  关于点  $(\frac{5\pi}{12}, 0)$  对称  
C.  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4})$  上单调递增      D. 若  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{12}, a]$  上存在最大值, 则实数  $a$  的取值范围为  $(\frac{\pi}{6}, +\infty)$

### 三、填空题

10. 函数  $y = \tan(3x - \frac{\pi}{4})$  的最小正周期为 \_\_\_\_\_.

11. 已知  $\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \frac{1}{3}$ , 则  $\sin(\frac{\pi}{6} - 2\alpha)$  的值为 \_\_\_\_\_.



12. 已知函数  $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$  (其中  $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则函数的单调递减区间为 \_\_\_\_\_.

### 四、解答题

13. 已知  $f(x) = \sin^2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x - \frac{1}{2}$  ( $x \in \mathbb{R}, \omega > 0$ ). 若  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ .

(1) 求  $f(x)$  的表达式和  $f(x)$  的递增区间;

(2) 求  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上的最大值和最小值.

14.  $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + \varphi) - \frac{3}{4}$  ( $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ ), 且  $f(\frac{\pi}{6}) = -1$ .

(1) 方程  $f(x) = 2k + 1$  在  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  有且仅有一个解, 求  $k$  的取值范围.

(2) 设  $g(x) = 2\sin^2 x + 4t\sin x$ , 对  $\forall x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 总  $\exists x_2 \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ , 使  $f(x_1) \geq g(x_2)$  成立, 求  $t$  的范围.

(3) 若  $h(x)$  与  $f(x)$  的图象关于  $x = -\frac{\pi}{12}$  对称, 求不等式  $h(\sin x) \geq h(\frac{\sqrt{3}}{2})$  的解集.



## 第二部分 向量和复数

### 一、单选题

1. 已知向量  $\vec{a} = (1, -2)$ , 则与  $\vec{a}$  平行的单位向量的坐标为( )

A.  $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$

B.  $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$  或  $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$

C.  $(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$

D.  $(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$  或  $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

2. 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ , 则  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = ( )$

A. 2

B.  $3\sqrt{2}$

C.  $2\sqrt{3}$

D. 12

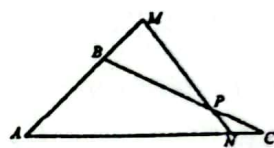
3. 若非零向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}|\vec{b}|$ , 且  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为( )

A.  $\frac{2\pi}{3}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

C.  $\frac{3\pi}{4}$

D.  $\frac{5\pi}{6}$



4. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $P$  满足  $BP = 2PC$ , 过点  $P$  的直线与  $AB$ ,  $AC$  所在的直线分别交于点  $M$ ,  $N$ , 若  $\vec{AB} = \lambda \vec{AM}$ ,

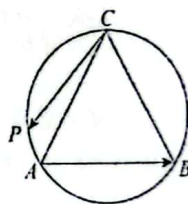
$\vec{AC} = \mu \vec{AN}$  ( $\lambda > 0, \mu > 0$ ), 则  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$  的最小值为( )

A.  $1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$

B.  $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

C.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



5. 如图, 已知点  $P$  为等边三角形  $ABC$  的外接圆上的一个动点, 若  $AB = 2$ , 则  $\vec{AB} \cdot \vec{CP}$  的取值范围为( )

A.  $[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}]$

B.  $[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$

C.  $[-2, 2]$

D.  $[-4, 4]$

6. 已知  $P$  为边长为 2 的正方形  $ABCD$  所在平面内一点, 则  $\vec{PC} \cdot (\vec{PB} + \vec{PD})$  的最小值为( )

A. -1

B. -3

C.  $-\frac{1}{2}$

D.  $-\frac{3}{2}$

### 二、多选题

7. 已知  $i$  为虚数单位, 下面四个命题中是真命题的是( )

A.  $3 + 4i > 2 + i$

B.  $a^2 - 4 + (a + 2)i$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 为纯虚数的充要条件为  $a = 2$

C.  $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$  的共轭复数对应的点为第三象限内的点

D.  $z = \frac{1+i}{2+i}$  的虚部为  $\frac{1}{5}i$

8. 下列说法错误的是( )

A. 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ,  $\vec{b} \parallel \vec{c}$ , 则  $\vec{a} \parallel \vec{c}$

B. 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则存在唯一实数  $\lambda$  使得  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$



C. 两个非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$ , 若  $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  共线且反向

D. 已知  $\vec{a}=(1,2), \vec{b}=(1,1)$ , 且  $\vec{a}$  与  $\vec{a}+\lambda\vec{b}$  的夹角为锐角, 则实数  $\lambda$  的取值范围是  $(-\frac{5}{3}, +\infty)$

9. 已知  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , 且  $z_3 \neq 0$ , 下列说法正确的是( )

A. 若  $z_1 z_3 = z_2 z_3$ , 则  $z_1 = z_2$

B.  $z_1^2 = |z_1|^2$

C.  $|\frac{z_1}{z_3}| = \frac{|z_1|}{|z_3|}$

D.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

### 三、填空题

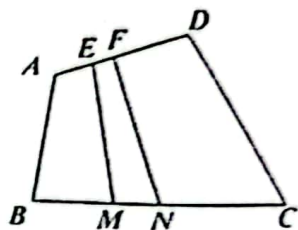
10. 已知点  $A(-1,1), B(1,2), C(-2,-1), D(2,2)$ , 则向量  $\overrightarrow{AB}$  在  $\overrightarrow{CD}$  上的投影向量的坐标为\_\_\_\_\_.

11. 在复数范围内, 纯虚数  $i$  的两个平方根为\_\_\_\_\_.

12. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB=2, CD=4$ , 向量  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ .

若  $E, F$  分别是边  $AD$  的三等分点和中点,  $M, N$  分别是边  $BC$  的三等分点和中点,

则  $|\overrightarrow{FN}| =$  \_\_\_\_\_,  $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{FN} =$  \_\_\_\_\_.



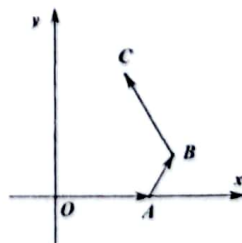
### 四、解答题 (解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

13. 已知  $|\vec{a}|=4$ , 向量  $\vec{b}=(-1, \sqrt{3})$ .

(1) 若向量  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 求向量  $\vec{a}$  的坐标; (2) 若向量  $\vec{a}$  与向量  $\vec{b}$  的夹角为  $120^\circ$ , 求  $|\vec{a}-\vec{b}|$ .

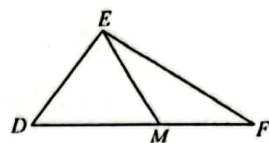
14. 如图, 在平面直角坐标系中,  $|\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{AB}|=4$ ,  $\angle OAB = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-2, 2\sqrt{3})$

(1) 求点  $B, C$  的坐标; (2) 求证: 四边形  $OABC$  为等腰梯形.



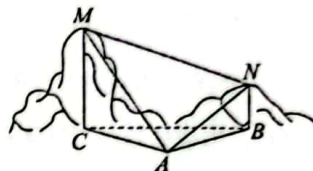


### 第三部分 解斜三角形



#### 一、单选题

1. 如图所示, 在  $\triangle DEF$  中,  $M$  在线段  $DF$  上,  $DE = DM = EM = 2$ ,  $\sin F = \frac{3}{5}$ , 则边  $EF$  的长为 ( )  
 A.  $2\sqrt{3}$       B.  $\frac{15\sqrt{3}}{16}$       C.  $\frac{15\sqrt{3}}{4}$       D.  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
2. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $c = 8, B = \frac{\pi}{6}$ . 若  $\triangle ABC$  有两解, 则  $b$  的值可以是 ( )  
 A. 4      B. 6      C. 8      D. 10
3. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $a = 2b \cos C$ , 则  $\triangle ABC$  一定是 ( )  
 A. 正三角形      B. 直角三角形      C. 等腰或直角三角形      D. 等腰三角形



4. 如图, 某景区为方便游客, 计划在两个山头  $M, N$  间架设一条索道. 为测量  $M, N$  间的距离, 施工单位测得以下数据: 两个山头的海拔高度  $MC = 100\sqrt{3}m, NB = 50\sqrt{2}m$ , 在  $BC$  同一水平面上选一点  $A$ , 测得  $M$  点的仰角为  $60^\circ$ ,  $N$  点的人仰角为  $30^\circ$ , 以及  $\angle MAN = 45^\circ$ , 则  $M, N$  间的距离为 ( )  
 A.  $100\sqrt{2}m$       B.  $120m$       C.  $100\sqrt{3}m$       D.  $200m$
5. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ ,  $a = 2$ ,  $\cos A(2\sin B - \sin C) = \sin A \cos C$ , 则  $b + c$  的最大值为 ( )  
 A.  $2\sqrt{2}$       B.  $2\sqrt{3}$       C. 4      D.  $4\sqrt{3}$
6. 已知  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  对应的边分别为  $a, b, c$ ,  $D$  是  $AB$  上的三等分点 (靠近点  $A$ ) 且  $CD = 1$ ,  $(a - b)\sin A = (c + b)(\sin C - \sin B)$ , 则  $a + 2b$  的最大值是 ( )  
 A.  $2\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{2}$       C. 2      D. 4

#### 二、多选题

7. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $(a + b):(b + c):(c + a) = 5:6:7$ , 则下列结论正确的是 ( )  
 A.  $\sin A:\sin B:\sin C = 2:3:4$       B.  $\triangle ABC$  为钝角三角形  
 C. 若  $a = 6$ , 则  $\triangle ABC$  的面积是  $6\sqrt{15}$       D. 若  $\triangle ABC$  外接圆半径是  $R$ , 内切圆半径为  $r$ , 则  $\frac{R}{r} = \frac{16}{5}$
8. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 7, AC = 5, BC = 3$ , 点  $D$  在线段  $AB$  上, 下列结论正确的是 ( )  
 A. 若  $CD$  是高, 则  $CD = \frac{15}{14}$       B. 若  $CD$  是中线, 则  $CD = \frac{\sqrt{19}}{2}$   
 C. 若  $CD$  是角平分线, 则  $CD = \frac{15}{8}$       D. 若  $CD = 3$ , 则  $D$  是线段  $AB$  的三等分点
9. “奔驰定理”因其几何表示酷似奔驰的标志得来, 是平面向量中一个非常优美的结论. 奔驰定理与三角形四心 (重心、内心、外心、垂心) 有着神秘的关联. 它的具体内容是: 已知  $M$  是  $\triangle ABC$  内一点,  $\triangle BMC, \triangle AMC, \triangle AMB$  的面积分别为  $S_A, S_B, S_C$ , 且  $S_A \cdot \overrightarrow{MA} + S_B \cdot \overrightarrow{MB} + S_C \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . 以下命题正确的有 ( )

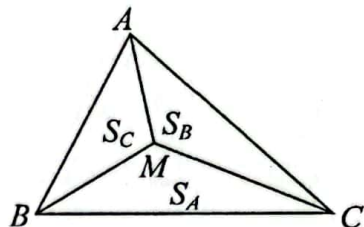


A. 若  $S_A:S_B:S_C=1:1:1$ , 则  $M$  为  $\triangle ABC$  的重心

B. 若  $M$  为  $\triangle ABC$  的内心, 则  $BC \cdot \overrightarrow{MA} + AC \cdot \overrightarrow{MB} + AB \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

C. 若  $\angle BAC = 45^\circ$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $M$  为  $\triangle ABC$  的外心, 则  $S_A:S_B:S_C = \sqrt{3}:2:1$

D. 若  $M$  为  $\triangle ABC$  的垂心,  $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ , 则  $\cos \angle AMB = -\frac{\sqrt{6}}{6}$



### 三、填空题

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边, 若  $A = 60^\circ$ ,  $a = \sqrt{3}$ , 则  $\frac{a-b-c}{\sin A - \sin B - \sin C} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 《后汉书·张衡传》:“阳嘉元年,复造候风地动仪.以精铜铸成,员径八尺,合盖隆起,形似酒尊,饰以篆文山龟鸟兽之形.中有都柱,傍行八道,施关发机.外有八龙,首衔铜丸,下有蟾蜍,张口承之.其牙机巧制,皆隐在尊中,覆盖周密无际.如有地动,尊则振龙,机发吐丸,而蟾蜍衔之.振声激扬,伺者因此觉知.虽一龙发机,而七首不动,寻其方面,乃知震之所在.验之以事,合契若神.”如图,为张衡地动仪的结构图,现要在相距 200km 的  $A, B$  两地各放置一个地动仪,  $B$  在  $A$  的东偏北



$60^\circ$  方向, 若  $A$  地动仪正东方向的铜丸落下,  $B$  地东南方向的铜丸落下, 则地震的位置在  $A$  地正东  $\underline{\hspace{2cm}}$  km.

12. 若不等式  $k\sin^2 B + \sin A \sin C > 23\sin B \sin C$  对任意  $\triangle ABC$  都成立, 则实数  $k$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 四、解答题

13. 在  $\triangle ABC$  中,  $b\sin A - a\cos \frac{B}{2} = 0$ .

(1) 求  $\angle B$ ;

(2) 若  $b = 3$ , 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使  $\triangle ABC$  存在且唯一确定, 求  $a$  及  $\triangle ABC$  的面积.

条件①:  $\sin A + \sin C = 2\sin B$ ; 条件②:  $c = \sqrt{3}$ ; 条件③:  $ac = 10$ .



14. 十字测天仪广泛应用于欧洲中世纪晚期的航海领域, 主要用于测量太阳等星体的方位, 便于船员确定位置. 如图 1 所示, 十字测天仪由杆  $AB$  和横档  $CD$  构成, 并且  $E$  是  $CD$  的中点, 横档与杆垂直并且可在杆上滑动. 十字测天仪的使用方法如下: 如图 2, 手持十字测天仪, 使得眼睛可以从  $A$  点观察. 滑动横档  $CD$  使得  $A, C$  在同一水平面上, 并且眼睛恰好能观察到太阳, 此时视线恰好经过点  $D$ ,  $DE$  的影子恰好是  $AE$ . 然后, 通过测量  $AE$  的长度, 可计算出视线和水平面的夹角  $\angle CAD$  (称为太阳高度角), 最后通过查阅地图来确定船员所在的位置.

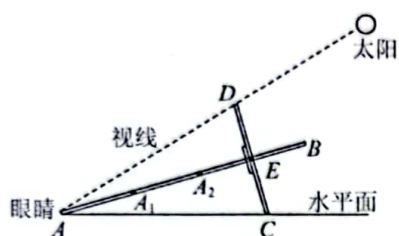


图1

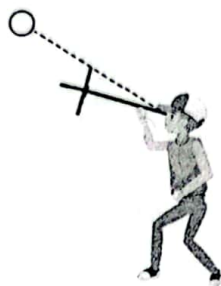


图2

- (1) 若在某次测量中, 横档  $CD$  的长度为 20, 测得太阳高度角  $\angle CAD = 60^\circ$ , 求影子  $AE$  的长;
- (2) 若在另一次测量中,  $AE = 40$ , 横档  $CD$  的长度为 20, 求太阳高度角的正弦值;
- (3) 在杆  $AB$  上有两点  $A_1, A_2$  满足  $AA_1 = \frac{1}{2}AA_2$ . 当横档  $CD$  的中点  $E$  位于  $A_i$  时, 记太阳高度角为  $\alpha_i (i=1, 2)$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2$  都是锐角. 证明:  $\alpha_1 < 2\alpha_2$ .

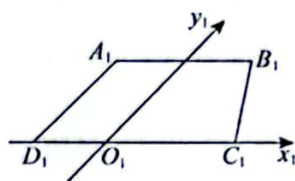


## 第四部分 立体几何

### 一、单选题

1. 下列说法中, 正确的是 ( )

- A. 以直角三角形的一边所在直线为轴旋转一周所得的几何体是圆锥
- B. 以正方体的顶点为顶点可以构成正四棱锥
- C. 用一个平面截圆锥, 得到一个圆锥和圆台
- D. 用一个平面去截球, 得到的截面是一个圆面



2. 如图, 梯形  $A_1B_1C_1D_1$  是一水平放置的平面图形  $ABCD$  在斜二测画法下的直观图. 若  $A_1D_1$  平行于  $y_1$  轴,

$A_1B_1 \parallel C_1D_1, A_1B_1 = \frac{3}{4}C_1D_1 = 3, A_1D_1 = 1$ , 则平面图形  $ABCD$  的面积是 ( )

- A. 14
- B. 7
- C.  $7\sqrt{2}$
- D.  $14\sqrt{2}$

3. 已知  $a, b, l$  是直线,  $\alpha$  是平面, 若  $a \parallel \alpha, b \subset \alpha$ , 则“ $l \perp a, l \perp b$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

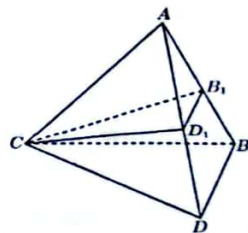
4. 在三棱锥  $D-ABC$  中,  $M, N$  分别是  $\triangle ACD, \triangle BCD$  的重心, 以下与直线  $MN$  平行的是 ( )

- A. 直线  $CD$
- B. 平面  $ABD$
- C. 平面  $ACD$
- D. 平面  $BCD$

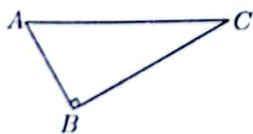
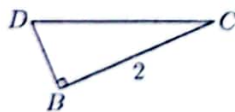
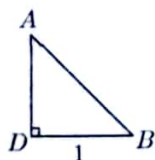
5. 如图, 正三棱锥  $A-BCD$  中,  $\angle BAD = 20^\circ$ , 侧棱长为 2, 过点  $C$  的平面与

侧棱  $AB, AD$  相交于  $B_1, D_1$ , 则  $\triangle CB_1D_1$  的周长的最小值为 ( )

- A.  $2\sqrt{2}$
- B.  $2\sqrt{3}$
- C. 4
- D. 2



6. 已知四面体的四个面均为直角三角形 (如图所示), 则该四面体中异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角的余弦值为 ( )



- A.  $-\frac{\sqrt{10}}{5}$
- B.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- C.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- D.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

### 二、多选题

7. 已知空间中三条不同的直线  $a, b, c$ , 三个不同的平面  $\alpha, \beta, \gamma$ , 则下列说法正确的是 ( )

- A. 若  $a \parallel b, a \subset \alpha, b \not\subset \alpha$ , 则  $b \parallel \alpha$
- B. 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
- C. 若  $\alpha \perp \beta, a \subset \alpha, a \perp \beta$ , 则  $a \parallel \alpha$
- D.  $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b, \alpha \cap \gamma = c$ , 则  $a \parallel b \parallel c$





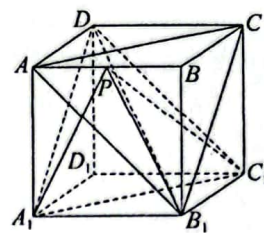
8. 如图, 已知棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 下列命题正确的是 ( )

A. 正方体外接球的直径为  $\sqrt{3}$

B. 点  $P$  在线段  $AB$  上运动, 则四面体  $P-A_1B_1C_1$  的体积不变

C. 与所有 12 条棱都相切的球的体积为  $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

D.  $M$  是正方体的内切球的球面上任意一点, 则  $AM$  长的最小值是  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$



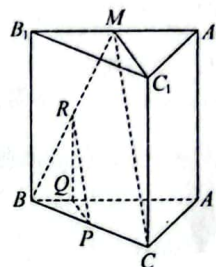
9. 如图, 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $P, M$  分别是棱  $BC, A_1B_1$  的中点, 连接  $BM, CM, C_1M, R$  是线段  $BM$  的中点,  $Q$  是线段  $AB$  上靠近点  $B$  的四等分点, 则下列说法正确的是 ( )

A. 平面  $RPQ \parallel$  平面  $C_1CM$

B. 三棱锥  $B-RPQ$  的体积与正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的体积之比为  $1:48$

C. 直线  $AC$  与平面  $RPQ$  所成的角为  $30^\circ$

D. 若  $AB = 2AA_1 = 4$ , 则过  $A, P, R$  三点作平面  $\alpha$ , 截正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  所得截面图形的面积为  $\frac{\sqrt{39}}{3}$



### 三、填空题

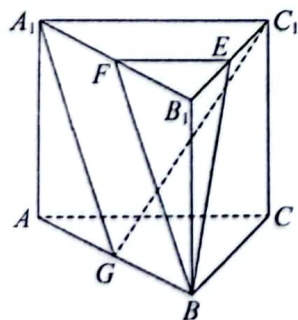
10. 已知一圆台的高为 3, 下底面面积是上底面面积的 4 倍, 若圆台的体积为  $7\pi$ , 则该圆台的母线长为\_\_\_\_\_.

11. 在正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 上、下底面边长分别为  $3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$ , 该正四棱台的外接球的表面积为  $100\pi$ , 则该正四棱台的高为\_\_\_\_\_.

12. 已知长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2, AD=4, AA_1=3$ ,  $E, F$  分别为  $A_1B_1, B_1C_1$  的中点, 则过  $D, E, F$  三点截得长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的截面周长为\_\_\_\_\_

### 四、解答题

13. 如图, 正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的所有棱长都等于 2,  $E, F, G$  分别为  $B_1C_1, A_1B_1, AB$  的中点.

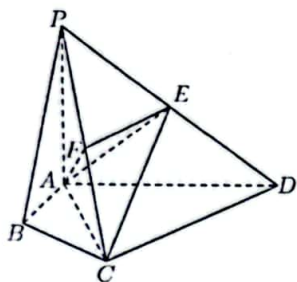


(1) 求证: 平面  $A_1C_1G \parallel$  平面  $BEF$ ;

(2) 求  $C_1G$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的正弦值.



14. 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$ ,  $\angle BCA = \angle CDA = 30^\circ$ ,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E, F$  分别为  $PD, PC$  的中点,  $PA = 2AB$ .



(1) 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $AEF$ ;

(2) 求二面角  $E-AC-B$  的大小.



## 第五部分 统计

### 一. 选择题 (共 6 小题)

1. 某校为了了解高二学生的身高情况, 打算在高二年级 12 个班中抽取 3 个班, 再按每个班男女生比例抽取样本, 正确的抽样方法是( )

- A. 简单随机抽样                      B. 先用分层抽样, 再用随机数表法  
C. 分层抽样                              D. 先用抽签法, 再用分层抽样

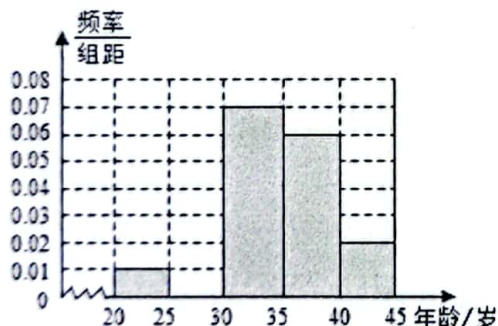
2. 已知圆台的上底面半径为 2, 下底面半径为 4, 若该圆台的体积为  $56\pi$ , 则其母线长为( )

- A.  $2\sqrt{10}$                       B.  $2\sqrt{6}$                       C. 4                      D.  $\sqrt{13}$

3. “幸福感指数”是指某个人主观地评价他对自己目前生活状态的满意程度的指标, 常用区间  $[0, 10]$  内的一个数来表示, 该数越接近 10 表示满意程度越高, 现随机抽取 7 位小区居民, 他们的幸福感指数分别为 5, 6, 7, 8, 9, 5, 4, 则这组数据的第 75 百分位数是( )

- A. 7                      B. 7.5                      C. 8                      D. 9

4. 某市要对两千多名出租车司机的年龄进行调查, 现从中随机抽出 100 名司机, 已知抽到的司机年龄都在  $[20, 45]$  岁之间, 根据调查结果得出司机的年龄情况残缺的频率分布直方图如图所示, 利用这个残缺的频率分布直方图估计该市出租车司机年龄的中位数大约是( )



- A. 31.6 岁                      B. 32.6 岁                      C. 33.6 岁                      D. 36.6 岁

5. 某学校有男生 400 人, 女生 600 人. 为调查该校全体学生每天睡眠时间, 采用分层抽样的方法抽取样本, 计算得男生每天睡眠时间均值为 7.5 小时, 方差为 1, 女生每天睡眠时间为 7 小时, 方差为 0.5. 若男、女样本量按比例分配, 则可估计总体方差为( )

- A. 0.45                      B. 0.62                      C. 0.7                      D. 0.76

6. 一组数据中的每一个数都乘以 2, 再减去 3 得到一组新的数据, 如果求得新数据的平均数为 7, 方差为 4, 则原来数据的平均数和方差分别为( )

- A. 5, 4                      B. 5, 1                      C. 11, 16                      D. 11, 4

### 二. 多选题 (共 3 小题)

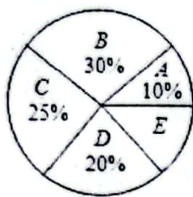
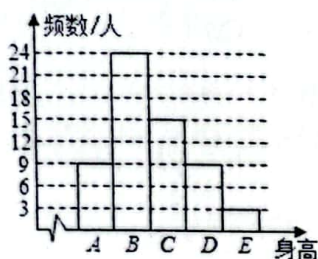
7. 某市教体局对全市高三年级的学生身高进行抽样调查, 随机抽取了 100 名学生, 他们的身高都处在 A, B, C, D, E 五个层次内, 根据抽样结果得到统计图表, 则下面叙述正确的是( )





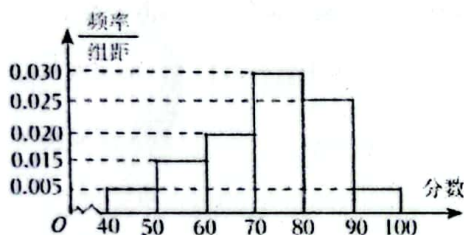
女生身高情况直方图

男生身高情况扇形图



- A. 样本中女生人数多于男生人数  
B. 样本中B层人数最多  
C. 样本中E层次男生人数为6人  
D. 样本中D层次男生人数多于女生人数

8. 某校从参加高二年级学业水平测试的600名学生中抽出80名学生，其数学成绩的频率分布直方图如图所示。由频率分布直方图估计这次测试数学成绩的众数、中位数、平均分和80%分位数求法正确的是( )



A. 众数计算方法为： $\frac{70+80}{2} = 75$

B. 中位数计算方法为：设中位数为  $x$ ，由于前三个矩形面积之和为 0.4，第四个矩形面积为 0.3， $0.3 + 0.4 > 0.5$ ，因此中位数位于第四个矩形内， $0.1 = 0.03(x - 70)$ ，从中解出  $x$  就是中位数

C. 平均分计算方法为：

$\frac{40+50}{2} \times 0.005 \times 10 + \frac{50+60}{2} \times 0.015 \times 10 + \frac{60+70}{2} \times 0.02 \times 10 + \frac{70+80}{2} \times 0.03 \times 10 + \frac{80+90}{2} \times 0.025 \times 10 + \frac{90+100}{2} \times 0.005 \times 10$  D. 80% 分位数计

算方法为： $80 + \frac{0.80 - (0.4 + 0.3)}{0.25} \times 10$

9. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 4， $E$  为  $AA_1$  上靠近  $A$  的四等分点， $F$  为  $CC_1$  上靠近  $C_1$  的四等分点， $M$  为四边形  $ABB_1A_1$  内一点（包含边界），若  $MA_1 \parallel$  平面  $BEF$ ，则下列结论正确的是( )

A. 线段  $MC_1$  长度的最小值为  $\sqrt{17}$

B. 三棱锥  $C_1 - MDD_1$  的体积为定值

C.  $DE \parallel$  平面  $B_1D_1F$

D. 直线  $EF$  与平面  $ABB_1A_1$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

### 三. 填空题（共3小题）

10. 2022年4月24日是第七个“中国航天日”，今年的主题是“航天点亮梦想”。某校组织学生参与航天知识竞答活动，某班8位同学成绩如下：7, 6, 8, 9, 8, 7, 10,  $m$ 。若去掉  $m$ ，该组数据的第25百分位数保持不变，则整数  $m(1 \leq m \leq 10)$  的值可以是 \_\_\_\_（写出一个满足条件的  $m$  值即可）。

11. 今年5月1日，某校5名教师在“学习强国”平台，上的当日积分依次为43, 49, 50, 52, 56，则这5个数据的方差是 \_\_\_\_。





12. 已知平面四边形  $ABCD$  中,  $AB = AD = \sqrt{2}$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $\triangle BCD$  是等边三角形, 现将  $\triangle BCD$  沿  $BD$  折起到  $\triangle BPD$ , 使得  $P$  点在平面  $ABD$  上的射影恰为  $\triangle ABD$  的外心, 则三棱锥  $P-ABD$  外接球的表面积为 \_\_\_\_.

#### 四. 解答题 (共 2 小题)

13. 某校有高中生 2000 人, 其中男女生比例约为 5:4, 为了获得该校全体高中生的身高信息, 采取了以下两种方案:

方案一: 采用比例分配的分层随机抽样方法, 抽收了样本容量为  $n$  的样本, 得到频数分布表和频率分布直方图.

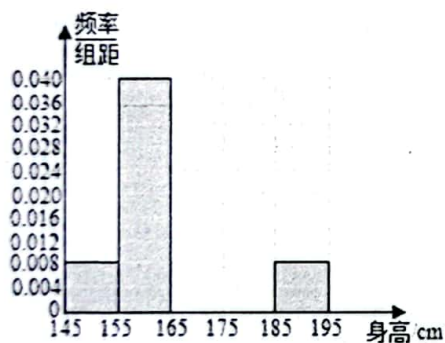
方案二: 采用分层随机抽样方法, 抽取了男、女生样本容量均为 25 的样本, 计算得到男生样本的均值为 170, 方差为 16, 女生样本的均值为 160, 方差为 20.

身高 (单位: cm)	[145, 155)	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 195]
频数	$m$	$p$	$q$	6	4

(1) 根据图表信息, 求  $n$ ,  $q$  并补充完整频率分布直方图, 估计该校高中生的身高均值; (同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值为代表)

(2) 计算方案二中总样本的均值及方差;

(3) 计算两种方案总样本均值的差, 并说明用方案二总样本的均值作为总体均值的估计合适吗? 为什么?



14. 在如图所示的空间几何体中, 平面  $ACD \perp$  平面  $ABC$ ,  $\triangle ACD$  与  $\triangle ACB$  均是等边三角形,  $AC = BE = 4$ ,  $BE$  和平面  $ABC$  所成的角为  $60^\circ$ . 过点  $E$  作平面  $ABC$  的垂线, 垂足  $F$  在  $\angle ABC$  的平分线上.

(1) 求证:  $DE \perp$  平面  $ADC$ ;

(2) 求点  $B$  到平面  $ADE$  的距离;

(3) 求二面角  $A-BC-E$  的正切值.

