



# 高 2025 届数学期末 复 习 题

姓名: \_\_\_\_\_

班级: \_\_\_\_\_

## 目录

第一章 集合与常用逻辑用语、不等式 .....	2
第二章 函数 .....	4
第三章 二次函数、幂函数、指数函数 .....	6
第四章 对数、对数函数 .....	8
第五章 三角函数概念、公式 .....	10
第六章 三角函数性质 .....	12
第七章 期末复习题一 .....	14
第八章 期末复习题二 .....	18

## 第一章 集合与常用逻辑用语、不等式

### 一、单选题

- 定义  $A \otimes B = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, m \in A, n \in B \right\}$ , 若  $A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 4, 8\}$  则  $A \otimes B$  中元素个数为  
A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 5
- 若实数  $a, b$ , 满足  $a < b < 0$ , 实数  $m < 0$ , 则下列不等式中一定成立的是  
A.  $a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}$                       B.  $mb^2 < ma^2$   
C.  $\frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}$                       D.  $\frac{2a+b}{a+2b} < \frac{a}{b}$
- 命题  $P$ : 关于  $x$  的不等式  $ax^2 + ax - x - 1 < 0$  的解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (-1, +\infty)$   $\left(\frac{1}{a} < -1\right)$  的一个必要不充分条件是  
A.  $a \leq -1$                       B.  $a > 0$                       C.  $-2 < a < 0$                       D.  $a < -2$
- 集合  $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ ,  $B = \{x \mid ax + 1 \leq 0\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 则实数  $a$  的取值范围是  
A.  $\left\{ a \mid -\frac{1}{3} \leq a < 1 \right\}$                       B.  $\left\{ a \mid -\frac{1}{3} \leq a \leq 1 \right\}$                       C.  $\{a \mid a < -1 \text{ 或 } a \geq 0\}$                       D.  $\left\{ a \mid -\frac{1}{3} \leq a < 0 \text{ 或 } 0 < a < 1 \right\}$
- 设正实数  $x, y$  满足  $x > \frac{1}{2}, y > 1$ , 不等式  $\frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \geq m$  恒成立, 则  $m$  的最大值为  
A. 8                      B. 16                      C.  $2\sqrt{2}$                       D.  $4\sqrt{2}$

### 二、多选题

- 下面命题正确的是  
A. “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的必要不充分条件  
B. 命题“任意  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $x^2 + x + 1 < 0$ ”的否定是“存在  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”  
C. “ $x \geq 6$ ”是“ $2^x \geq 32$ ”的充分不必要条件  
D. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a \neq 0$ ”是“ $ab \neq 0$ ”的必要不充分条件
- 下列函数的最小值为 4 的有  
A.  $y = x^2 + \frac{4}{x^2}$                       B.  $y = \frac{1}{x-1} + x + 1 (x > 1)$   
C.  $y = \frac{x^2 + 10}{\sqrt{x^2 + 6}}$                       D.  $y = x + \frac{9}{x} - 2$
- 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $x + y + xy - 3 = 0$ , 则  
A.  $xy$  的范围  $(0, 1]$                       B.  $x + y$  的范围是  $[2, 3]$   
C.  $x + 4y > 3$                       D.  $x + 2y$  的最小值是  $4\sqrt{2} - 3$

### 三、填空题

9. 已知集合  $A = \{2, 3, 2a+1\}$ ,  $B = \{a^2+a-4, a^2+1\}$ , 且  $A \cap B = \{2\}$ , 则实数  $a$  的值是\_\_\_\_\_.
10. 商品批发市场中, 某商品的定价每天随市场波动, 甲乙两名采购员在每月的同一天去该市场购买同一种商品, 甲每次购买  $a$  公斤, 乙每次购买  $b$  元 ( $a, b$  互不相等), 该方案实施 2 次后\_\_\_\_\_的购买方案平均价格更低. (填“甲”或“乙”)
11. 已知正实数  $a, b$  满足  $2a+b=2$ , 则  $(4a^2+1) \cdot (b^2+1)$  的最小值为\_\_\_\_\_.  $\frac{2a^2-b+4}{a+1} + \frac{b^2-2a-2}{b+4}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

### 四、解答题

12. 第 31 届世界大学生夏季运动会将于 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在四川成都举行, 某公司为了竞标配套活动的相关代言, 决定对旗下的某商品进行一次评估. 该商品原来每件售价为 25 元, 年销售 8 万件.
- (1) 据市场调查, 若价格每提高 1 元, 销售量将相应减少 2 000 件, 要使销售的总收入不低于原收入, 该商品每件定价最多为多少元?
- (2) 为了抓住此次契机, 扩大该商品的影响力, 提高年销售量, 公司决定立即对该商品进行全面技术革新和营销策略改革, 并提高定价到  $x$  元. 公司拟投入  $\frac{1}{6}(x^2 - 600)$  万元作为技改费用, 投入 50 万元作为固定宣传费用, 投入  $\frac{x}{5}$  万元作为浮动宣传费用. 试问: 当该商品改革后的销售量  $a$  至少应达到多少万件时, 才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和? 并求出此时商品的每件定价.

## 第二章 函数

### 一、单选题

1. 下列四组函数中，表示同一个函数的一组是

A.  $y = |x|, u = \sqrt{v^2}$

B.  $y = \sqrt{x^2}, s = (\sqrt{t})^2$

C.  $y = \frac{x^2-1}{x-1}, m = n+1$

D.  $y = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}, y = \sqrt{x^2-1}$

2. 已知函数  $y = f(2^x)$  的定义域为  $[1, 4]$ ，则函数  $y = \frac{f(x+1)}{x-1}$  的定义域为

A.  $[-1, 1)$

B.  $(1, 15]$

C.  $[0, 3]$

D.  $[0, 1) \cup (1, 3]$

3. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |2ax-9|, & x \leq 3 \\ (a-1)^{x-3}, & x > 3 \end{cases}$ ，且对于  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ， $x_1 \neq x_2$ ，都满足  $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$ ，则实数  $a$  的取值范围是

A.  $(1, 2)$

B.  $\left(1, \frac{3}{2}\right]$

C.  $\left(1, \frac{4}{3}\right]$

D.  $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$

4. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，且  $f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$  是偶函数， $f(x-1)$  是奇函数，则

A.  $f(0) = 0$

B.  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

C.  $f(1) = 0$

D.  $f(3) = 0$

5. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，且  $f(x) = \frac{1}{3}f(x+1)$ ，当  $x \in (-1, 0]$  时， $f(x) = x(x+1)$ ，若对任意  $x \in (-\infty, m]$ ，都有  $f(x) \geq -\frac{81}{16}$ ，则实数  $m$  的取值范围是

A.  $\left[-\infty, \frac{7}{3}\right]$

B.  $\left[-\infty, \frac{11}{4}\right]$

C.  $\left[-\infty, \frac{9}{4}\right]$

D.  $(-\infty, 3]$

### 二、多选题

6. 下列函数中，满足对  $\forall x_1 < x_2 \in (0, +\infty)$ ，都有  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$  的是

A.  $f(x) = x^{-1}$

B.  $f(x) = x^3$

C.  $f(x) = \sqrt{x}$

D.  $f(x) = e^{-x}$

7. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设  $x \in \mathbf{R}$ ，用  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数，则  $y = [x]$  称为高斯函数。例如：

$[-3.2] = -4$ ， $[2.3] = 2$ 。已知函数  $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2}$ ，则关于函数  $g(x) = [f(x)]$  的叙述中正确的是

A.  $f(x)$  是奇函数

B.  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数

C.  $g(x)$  是偶函数

D.  $g(x)$  的值域是  $\{-1, 0\}$

8. 已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \frac{2^x-1}{2^x+1} + 3$ ，函数  $g(x)$  满足  $g(-x) + g(x) = 6$ 。则

A.  $f(\lg 2022) + f\left(\lg \frac{1}{2022}\right) = 6$

B. 函数  $g(x)$  的图象关于点  $(0,3)$  对称

C. 若实数  $a, b$  满足  $f(a) + f(b) > 6$ ，则  $a+b > 0$

D. 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  图象的交点为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ，则  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = 6$

### 三、填空题

9. 已知  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数， $f(x+1)$  是偶函数，且当  $x \in (0,1]$  时， $f(x) = -x(x-2)$ ，则  $f(2020) - f(2021) =$  \_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $f(x) = x + \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ ，若不等式  $f(3^x - 9^x) + f(a \cdot 3^x - 2) < 0$  对任意实数  $x$  恒成立，则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

11. 已知正实数  $a, b$  满足  $a^3 - \frac{8}{(b+1)^3} = \frac{10}{b+1} - 5a$ ，则  $3a+2b$  的最小值是\_\_\_\_\_.

### 四、解答题

12. 已知  $f(x)$  定义域为  $\mathbf{R}$ ，对任意  $x, y \in \mathbf{R}$  都有  $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ ，当  $x > 0$  时， $f(x) > 1$ ， $f(-1) = 2$ 。

(1) 试判断  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的单调性，并证明；

(2) 解不等式： $f(3x^2 - 4x - 2) + 2f(x) > 4$ 。

### 第三章 二次函数、幂函数、指数函数

#### 一、单选题：

1. 不等式  $3x^2 - 5x - 2 \leq 0$  的解集是

- A.  $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$       B.  $\left[-2, \frac{1}{3}\right]$       C.  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup [2, +\infty)$       D.  $(-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

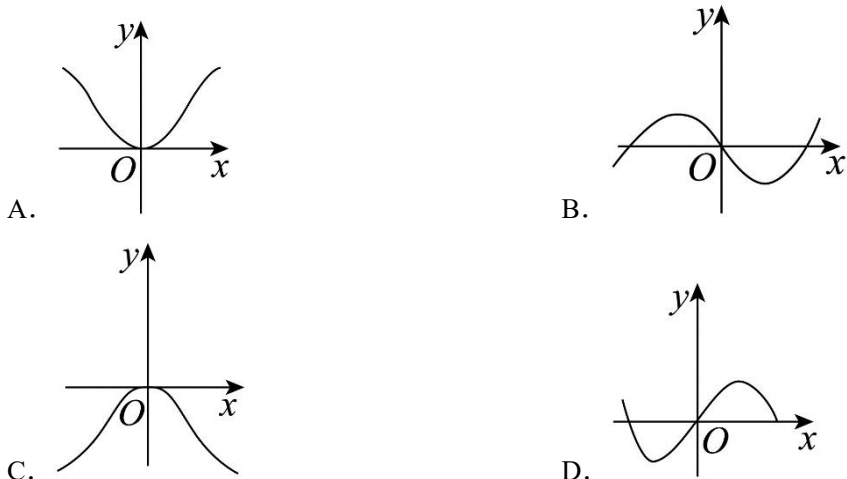
2. 式子  $\frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt[3]{m^4}}{\sqrt[6]{m^5}} (m > 0)$  的计算结果为

- A. 1      B.  $m^{\frac{1}{20}}$       C.  $m^{\frac{5}{12}}$       D.  $m$

3. “幂函数  $f(x) = (m^2 + m - 1)x^m$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数”是“函数  $g(x) = 2^x - m^2 \cdot 2^{-x}$  为奇函数”的 ( ) 条件

- A. 充分不必要      B. 必要不充分      C. 充分必要      D. 既不充分也不必要

4. 函数  $f(x) = x\left(\frac{2}{1+2^x} - 1\right)$  的图象大致为



5. 已知函数  $f(x)$  既是二次函数又是幂函数，函数  $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ ，函数  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)+2} + 2$ ，则

$h(20) + h(19) + \cdots + h(1) + h(0) + h(-1) + \cdots + h(-19) + h(-20)$  的值为

- A. 0      B. 20      C. 80      D. 82

#### 二、多选题

6. 已知函数  $y = ax^2 + bx - 3$ ，则下列结论正确的是

- A. 关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx - 3 < 0$  的解集可以是  $\{x | x > 3\}$   
 B. 关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx - 3 > 0$  的解集可以是  $\emptyset$   
 C. 函数  $y = ax^2 + bx - 3$  的图象与  $x$  轴正半轴可以有两个交点  
 D. “关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx - 3 = 0$  有一个正根和一个负根”的充要条件是“ $a > 0$ ”

7. 若函数  $y = a^x - (b+1)$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像过第一、三、四象限，则必有

- A.  $0 < a < 1$       B.  $a > 1$       C.  $b > 0$       D.  $b < 0$

8. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设  $x \in \mathbf{R}$ ，用  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数，则  $y = [x]$  称为高斯函数，例如： $[-3.5] = -4$ ， $[2.1] = 2$ 。已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2}$ ，则关于函数  $g(x) = [f(x)]$  的叙述中正确的是

- A.  $g(x)$  是偶函数      B.  $f(x)$  是奇函数  
C.  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数      D.  $g(x)$  的值域是  $\{-1, 0, 1\}$

### 三、填空题

9. 设关于  $x$  的不等式  $ax^2 + 8(a+1)x + 7a + 16 \geq 0$ , ( $a \in \mathbf{Z}$ )，只有有限个整数解，且 0 是其中一个解，则全部不等式的非负整数解的和为\_\_\_\_\_.

10. 设  $b \in \mathbf{R}$ ，若函数  $f(x) = 9^x - 3^{x+1} + b$  在  $[-1, 1]$  上的最大值是 3，则  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最小值是\_\_\_\_\_.

11. 已知幂函数  $y = x^{m^2-2m-3}$  ( $m \in \mathbf{N}^*$ ) 的图象关于  $y$  轴对称，且在  $(0, +\infty)$  上单调递减，则满足  $(a+1)^{\frac{m}{3}} < (3-2a)^{\frac{m}{3}}$  的  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

### 四、解答题

12. 已知函数  $f(x) = a \cdot 2^x - 2^{1-x}$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数.

(1) 求实数  $a$  的值；

(2) 求不等式  $f(f(x)-2) > 3$  的解集；

(3) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) > \frac{k}{2^{x-1}} + 2$  恒成立，求实数  $k$  的取值范围.



## 第四章 对数、对数函数

### 一、单选题

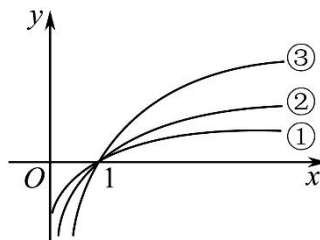
1. 函数  $f(x) = \log_2 x$ ,  $g(x) = \log_5 x$ ,  $h(x) = \lg x$  的图象如图所示, 则  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  的图象所对应的编号依次为

A. ①②③

B. ③①②

C. ③②①

D. ①③②



2. 设  $a = \log_{\frac{1}{5}} 3$ ,  $b = \log_{\frac{1}{3}} 5$ ,  $c = (\frac{1}{5})^{0.3}$ , 则

A.  $a < b < c$

B.  $a < c < b$

C.  $b < c < a$

D.  $b < a < c$

3. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 3)$ , 则函数  $g(x) = \frac{f(1+x)}{\ln(1-x)}$  的定义域为

A.  $(-2, 1)$

B.  $(-2, 0) \cup (0, 1)$

C.  $(0, 1)$

D.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

4. 已知  $x, y$  满足  $x + \ln x + 2 = 0$ ,  $\ln(1-y) - y + 3 = 0$ , 其中  $e$  是自然对数的底数, 则  $x+y$  的值为

A.  $-e$

B. 1

C.  $\frac{1}{e}$

D.  $-e^4$

5. 已知函数  $f(x) = 2022^x + \log_{2022}(\sqrt{x^2+1} + x) - 2022^{-x} + 1011$ , 则关于  $x$  的不等式  $f(4x+1) + f(2x+1) - 2022 < 0$  的解集为

A.  $(-\infty, -2)$

B.  $(-\infty, -\frac{1}{3})$

C.  $(-\infty, -\frac{2}{3})$

D.  $(-\infty, 1011)$

### 二、多选题

6. 对于函数  $f(x)$  定义域内的任意  $x_1, x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ ), 当  $f(x) = \lg x$  时, 下述结论中正确的是

A.  $f(0) = 1$

B.  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

C.  $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

D.  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

7. 下列命题正确的是

A. 函数  $y = \sqrt{1 - \log_2(1-x)}$  的定义域为  $[-1, 1)$

B. 函数  $f(x) = \log_2 x + \log_2(4-x)$  的最大值为 2

C. 若  $(\frac{1}{2})^a = 3^b = m$ , 且  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$ , 则  $m = \sqrt{6}$

D. 函数  $y = 2\cos^2 x + 2\sin x - 1$  的最大值为  $\frac{3}{2}$

8. 关于函数  $f(x) = \lg \frac{x^2+1}{|x|} (x \neq 0)$ ，下列结论正确的是

- A. 函数  $f(x)$  的图象关于  $y$  轴对称
- B. 函数  $f(x)$  的最小值是  $\lg 2$
- C. 当  $x > 0$  时， $f(x)$  是增函数；当  $x < 0$  时， $f(x)$  是减函数
- D. 函数  $y = f(x) - m$  的所有零点之和为 0

### 三、填空题

9. 计算： $\log_3 \frac{\sqrt[4]{27}}{3} + \lg 25 + \lg 4 + 7^{\log_7 2} =$ \_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $g(x) = f(x) + x^2$  是奇函数，当  $x > 0$  时，函数  $f(x)$  的图像与函数  $y = \log_2 x$  的图像关于直线  $y = x$  对称，则  $g(-1) =$ \_\_\_\_\_.

11. 已知函数  $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 9)$ ,  $g(x) = m \cdot 4^x + 2^{x+1} \quad (m < 0)$ . 若  $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,  $\exists x_2 \in [1, 2]$  使得  $f(x_1) + g(x_2) > 6$  成立，则  $m$  的范围是\_\_\_\_\_.

### 四、解答题

12. 函数  $f(x) = \lg(a \cdot 9^x + 3^x - 1)$ .

(1) 如果  $x \in (0, 1)$  时， $f(x)$  有意义，求实数  $a$  的取值范围；

(2) 当  $a \leq 0$  时， $f(x)$  值域为  $\mathbb{R}$ ，求实数  $a$  的值；

(3) 在(2)条件下， $g(x)$  为定义域为  $\mathbb{R}$  的奇函数，且  $x > 0$  时， $g(x) = 10^{f(x)} + 1$ . 解关于  $x$  的不等式  $g(x^2 + tx - 2t) \geq \frac{g^3(x)}{|g(x)|}$ .

## 第五章 三角函数概念、公式

### 一、单选题

1. 在  $\triangle ABC$  中，下列等式一定成立的是

- A.  $\sin(A+B) = -\sin C$       B.  $\cos(A+B) = \cos C$   
C.  $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$       D.  $\sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$

2. 已知角  $\alpha$  的终边与单位圆交于点  $P\left(-\frac{1}{3}, m\right)$ ，则  $\sin \alpha =$

- A.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$       D.  $\pm \frac{1}{3}$

3. 若  $\alpha$  为任意角，则满足  $\cos\left(\alpha + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$  的一个  $k$  的值为

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

4. 《掷铁饼者》取材于希腊的现实生活中的体育竞技活动，刻画的是—名强健的男子在掷铁饼过程中具有表现力的瞬间（如图）。现在把掷铁饼者张开的双臂近似看成一张拉满弦的“弓”，掷铁饼者的手臂长约为  $\frac{\pi}{4}\text{m}$ ，肩宽约为  $\frac{\pi}{8}\text{m}$ ，“弓”所在圆的半径约为  $\frac{5}{4}\text{m}$ ，则掷铁饼者双手之间的距离约为（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）

“弓”所在圆的半径约为  $\frac{5}{4}\text{m}$ ，则掷铁饼者双手之间的距离约为（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）

- A. 1.012m      B. 1.768m      C. 2.043m      D. 2.945m

5. （2022·四川省成都市新都一中高一期中（理））已知  $f(x) = x^2 - (a+1)x + \left(2a + \frac{1}{2}\right)$ ，

$f(\sin \theta) = f(\cos \theta) = 0$ ，且  $\sin \theta \neq \cos \theta$ ，设  $\lambda = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ，则  $\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$  的值为

- A.  $\frac{5}{2} - 2\sqrt{2}$       B.  $5 - 4\sqrt{2}$       C.  $\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}$       D.  $2 + \sqrt{2}$



### 二、多选题

6. 已知  $\theta \in (0, \pi)$ ， $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则下列结论正确的是

- A.  $\sin \theta \cos \theta < 0$       B.  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$       C.  $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$       D.  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 在  $\triangle ABC$  中，下列等式一定成立的是

- A.  $\sin \frac{A+B}{2} = -\cos \frac{C}{2}$       B.  $\sin(2A+2B) = -\cos 2C$   
C.  $\tan(A+B) = -\tan C$       D.  $\sin(A+B) = \sin C$

8. 定义：角  $\theta$  与  $\varphi$  都是任意角，若满足  $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ，则称  $\theta$  与  $\varphi$  “广义互余”。已知  $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{4}$ ，则下列角  $\beta$  中，可能与角  $\alpha$  “广义互余”的是

- A.  $\sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$       B.  $\cos(\pi + \beta) = \frac{1}{4}$       C.  $\tan \beta = \sqrt{15}$       D.  $\tan \beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$

### 三、填空题

9. 已知函数  $f(x) = ax^3 + b\sin x + 2 (ab \neq 0)$ ，若  $f(2019) = k$ ，则  $f(-2019) =$ \_\_\_\_\_.

10. 若  $\tan^2 \alpha = 2 \tan^2 \beta + 1$ ，则  $2\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta =$ \_\_.

11. 已知角  $\alpha$  为第一象限角，其终边上一点  $P(x, y)$  满足  $2\ln(2x - y) = \ln(x^2 + y^2)$ ，则  $2\cos \alpha - \sin \alpha =$ \_\_\_\_\_.

### 四、解答题

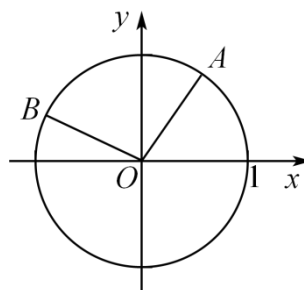
12. (1) 已知  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ ，求  $\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3$  的值

(2) 已知  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，当  $0 < \theta < \pi$  时，求  $\tan \theta$  的值.

13. 如图，锐角  $\alpha$  和钝角  $\beta$  的终边分别与单位圆交于  $A, B$  两点，且  $OA \perp OB$ .

(1) 求  $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \beta) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$  的值；

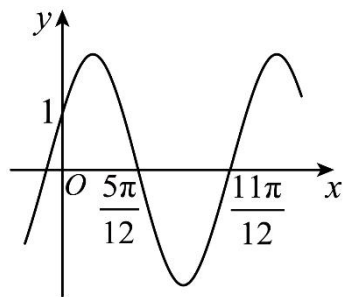
(2) 若点  $A$  的横坐标为  $\frac{3}{5}$ ，求  $2\sin \alpha \cos \beta$  的值.



## 第六章 三角函数性质

### 一、单选题

- 函数  $f(x)$  的图象是中心对称图形，如果它的一个对称中心是  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ，那么  $f(x)$  的解析式可以是  
A.  $\sin x$       B.  $\cos x$       C.  $\sin x + 1$       D.  $\cos x + 1$
- 已知函数  $f(x) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，函数  $g(x)$  的图象由  $f(x)$  图象向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位得到，则下列关于函数  $g(x)$  的图象说法正确的是  
A. 关于  $y$  轴对称      B. 关于原点对称  
C. 关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称      D. 关于点  $(\frac{5\pi}{36}, 0)$  对称
- 函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到函数  $g(x)$  的图象，则  $g(x) =$   
A.  $2\cos 2x$       B.  $\sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$   
C.  $\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$       D.  $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
- “ $\sin x_0 = 0$ ”是“函数  $y = \tan x$  的图像关于  $(x_0, 0)$  中心对称”的  
A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分又不必要条件
- 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$ ) 是  $\mathbf{R}$  上的偶函数，其图象关于点  $M(\frac{3\pi}{4}, 0)$  对称，且在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是单调函数，则  $\omega$  和  $\varphi$  的值分别为  
A.  $\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}$       B.  $2, \frac{\pi}{3}$       C.  $2, \frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{10}{3}, \frac{\pi}{2}$



### 二、多选题

- 下列不等式成立的是  
A.  $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) < \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$       B.  $\cos 400^\circ > \cos(-50^\circ)$   
C.  $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) < \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$       D.  $\sin 3 < \sin 2$
- 已知函数  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ ，下列选项中正确的是  
A.  $f(x)$  的最小值为  $-2$       B.  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  上单调递增  
C.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{8}, 0)$  中心对称      D.  $f(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  上值域为  $[\sqrt{2} + 1, 3]$

8. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\omega \in (0, 2)$ , 将函数  $f(x)$  图象上的所有点的纵坐标保持不变, 横坐标缩短为原来的一半得到函数  $g(x)$ , 且不等式  $g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{4}\right)$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则下列说法正确的是

- A.  $\omega=1$
- B.  $\frac{3}{4}\pi$  为  $g(x)$  的一个零点
- C.  $g(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  上单调递增
- D. 方程  $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$  在  $x \in (0, 10\pi)$  上共有 30 个解

### 三、填空题

9. 若函数  $f(x) = 2\sin\left(3\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的最小正周期为  $\pi$ , 则  $\omega$  的值为\_\_\_\_\_.

10. 函数  $f(x) = 2\sin^2 x - 3\cos x - 1$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

11. 在函数  $f(x) = \sin(2x - \varphi)$  ( $\varphi > 0$ ) 图象与  $x$  轴的所有交点中, 点  $\left(\frac{\varphi}{2}, 0\right)$  离原点最近, 则  $\varphi$  可以等于\_\_\_\_\_ (写出一个值即可).

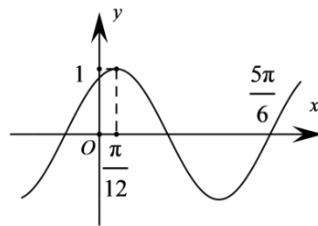
#### 四、解答题

12. 函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图像如图所示.

(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若  $\forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ,  $[f(x)]^2 - mf(x) - 1 \leq 0$ , 求  $m$  的取值范围;

(3) 求实数  $a$  和正整数  $n$ , 使得函数  $F(x) = f(x) - a$  在  $[0, n\pi]$  上恰有 2021 个零点.



# 重庆育才中学高 2025 届高一上期末复习考试一

## 数 学

### 注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | (x+2)(x-1) \leq 0\}$ ,  $N = \{x | \log_2 x \leq 1\}$ , 则  $M \cup N =$

- A.  $(0,1]$       B.  $[-2,2]$       C.  $[-2,1]$       D.  $(-\infty,2]$

2. 命题“ $\forall x > 0, \sin x \leq 1$ ”的否定是

- A.  $\forall x > 0, \sin x > 1$       B.  $\forall x \leq 0, \sin x > 1$   
C.  $\exists x > 0, \sin x > 1$       D.  $\exists x \leq 0, \sin x > 1$

3. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-8, m)$ , 且  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ , 则  $\cos \alpha$  的值是

- A.  $\frac{3}{5}$       B.  $-\frac{3}{5}$       C.  $-\frac{4}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

4. 我国的 5G 通信技术领先世界，5G 技术的数学原理之一是著名的香农 (Shannon) 公式，香农提出并严格证明了“在被高斯白噪声干扰的信道中，计算最大信息传送速率  $C$  的公式  $C = W \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$ ，其中  $W$  是信道带宽 (赫兹)， $S$  是信道内所传信号的平均功率 (瓦)， $N$  是信道内部的高斯噪声功率 (瓦)，其中  $\frac{S}{N}$  叫做信噪比。根据此公式，在不改变  $W$  的前提下，将信噪比从 99 提升至  $\lambda$ , 使得  $C$  大约增加了 60%，则  $\lambda$  的值大约为 ( ) (参考数据:  $10^{0.2} \approx 1.58$ )

- A. 1559      B. 3943      C. 1579      D. 2512

5. 已知  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 且  $\alpha \in \left( 0, \frac{\pi}{4} \right)$ , 则  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$

- A.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$       B.  $-\frac{\sqrt{15}}{4}$       C.  $\pm \frac{\sqrt{15}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知  $a = \left( \frac{8}{27} \right)^{\frac{1}{3}}$ ,  $b = \tan \frac{3}{2}$ ,  $c = \frac{18}{4 \log_5 6 + 9 \log_5 5}$ , 则

- A.  $a > c > b$       B.  $b > c > a$       C.  $a > b > c$       D.  $b > a > c$

7. 已知函数  $f(x) = \sin \left( \omega x + \frac{\pi}{6} \right)$  (其中  $\omega > 0$ ) 在  $\left( 0, \frac{\pi}{6} \right)$  上单调递增, 在  $\left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$  上单调递减, 则  $\omega$  的取值范围为

- A.  $(0,1]$       B.  $(0,2]$       C.  $[1,2]$       D.  $(1,2)$

8. 已知定义在  $R$  上的奇函数  $f(x)$  恒有  $f(x-1)=f(x+1)$ ，当  $x \in [0,1]$  时， $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ ，已知  $k \in \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{18}\right)$ ，则函数  $g(x)=f(x)-kx-\frac{1}{3}$  在  $(-1,6)$  上的零点个数为

- A. 4 个                      B. 5 个                      C. 3 个或 4 个                      D. 4 个或 5 个

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列叙述中正确的是

- A. 若  $1 \leq a \leq 5$ ， $-1 \leq b \leq 2$ ，则  $-1 \leq a-2b \leq 7$     B. 若  $\log_3 x = \frac{1}{2}$ ，则  $x = \sqrt{3}$   
C. 函数  $y = 4^x + 2^x + 1$  的值域为  $(1, +\infty)$                       D. 已知  $a, b \in R$ ，则“ $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$ ”是“ $a < b < 0$ ”的充分不必要条件

10. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 在区间  $[0, \pi]$  上有且仅有 4 条对称轴，则下列四个结论正确的是

- A.  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  上有且仅有 3 个不同的零点    B.  $f(x)$  的最小正周期可能是  $\frac{\pi}{2}$   
C.  $\omega$  的取值范围是  $\left[\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$                       D.  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$  上单调递增

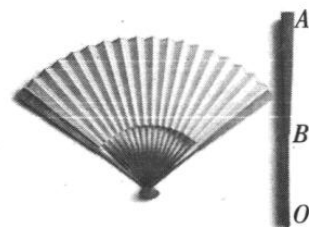
11. 若  $a > b > 0$ ，且  $a+b=1$ ，则

- A.  $a \ln b > b \ln a$                       B.  $\frac{2}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{2}$                       C.  $(a^2+1)(b^2+1) < \frac{3}{2}$                       D.  $\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{4}$

12. 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义，由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用.在混沌理论中，函数的周期点是一个关键概念，定义如下：设  $f(x)$  是定义在  $R$  上的函数，对于  $x_0 \in R$ ，令  $x_n = f(x_{n-1})$  ( $n=1,2,3,\dots$ )，若存在正整数  $k$  使得  $x_k = x_0$ ，且当  $0 < j < k$  时， $x_j \neq x_0$ ，则称  $x_0$  是  $f(x)$  的一个周期为  $k$  的周期点.给出下列四个结论正确的是

- A. 若  $f(x) = e^{x-1}$ ，则  $f(x)$  存在唯一一个周期为 1 的周期点；  
B. 若  $f(x) = 2(1-x)$ ，则  $f(x)$  存在周期为 2 的周期点；  
C. 若  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ，则  $f(x)$  不存在周期为 3 的周期点；

D. 若  $f(x) = x(1-x)$ ，则对任意正整数  $n$ ， $\frac{1}{2}$  都不是  $f(x)$  的周期为  $n$  的周期点.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 折扇是一种用竹木做扇骨，韧纸或绫绢做扇面的能折叠的扇子.用时须展开，成扇形，聚头散尾.如图，某折扇的扇骨长度  $OA=15\text{cm}$ ，扇面长度  $AB=10\text{cm}$ ，已知折扇展开所对圆心角的弧度为  $\frac{3}{2}$ ，则扇面的面积为\_\_\_\_\_.



14. 已知函数  $f(x)$  满足：①  $f(x+\pi)=-f(x)$ ；②  $f(x)$  最大值为 2；③  $f(x)$  图像关于原点对称. 写出满足以上三个条件的函数  $f(x)$  的一个解析式\_\_\_\_\_.

15. 已知  $\sin(\pi-\alpha)=2\cos\alpha$ ，则  $\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=$ \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x)=\begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq 2 \\ f(4-x), & 2 < x < 4 \end{cases}$ ，若当方程  $f(x)=m$  有四个不等实根  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ，( $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ) 时，不等式  $kx_3 \cdot x_4 + x_1^2 + x_2^2 \geq k+11$  恒成立，则实数  $k$  的最小值为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 化简：
$$f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$$

(2) 已知角  $\alpha$  的终边在直线  $y=-3x$  上，求  $10\sin\alpha + \frac{3}{\cos\alpha}$  的值.

18. 已知函数  $y=a^x$  ( $a>0$  且  $a \neq 1$ ) 在  $[1,2]$  上最大值和最小值的和为 12，令  $f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{3}}$ .

(1) 求实数  $a$  的值.

(2) 并探究  $f(x)+f(1-x)$  是否为定值，若是定值，写出证明过程；若不是定值，请说明理由；

(3) 解不等式： $f(1-x)+2f^2(x)<1$ .

19. 已知定义在  $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$  上的函数  $f(x)$  满足  $\forall x, y \in D$ ，有： $f(xy)=f(x)+f(y)$ . 当  $x>1$  时， $f(x)>0$ .

(1) 证明： $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ ；(2) 若  $f(-2)=1$ ，解不等式： $f(1-2x)<-2$ .

20. 2022 年 12 月 7 日，国务院发布了精准防控新冠疫情的十条最新措施，以减轻疫情防控对企业经营和民众生活带来的损失。某公司为了尽快恢复经营活动，决定对业绩在 50 万元到 200 万元的业务员进行奖励，奖励方案遵循以下原则：奖金  $y$ （单位：万元）随着业绩值  $x$ （单位：万元）的增加而增加，但不超过业绩值的 5%。

(1) 若某业务员的业绩为 100 万，核定可得 5 万元奖金，若该公司用函数  $y = \lg x + kx + 1$  ( $k$  为常数) 作为奖励函数模型，则业绩 200 万元的业务员可以得到多少奖励？（参考数据  $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$ ）

(2) 若采用函数  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (a - 0.05)x + 100a - 8000$ ，求  $a$  的范围。

21. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ )，且  $f(x)$  图象的相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ ，再从条件

①、条件②、条件③中选择两个作为一组已知条件。

(1) 确定  $f(x)$  的解析式；

(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上的最小值为  $-2$ ，求  $a$  的取值范围。

条件①：  $f(x)$  的最小值为  $-2$ ；

条件②：  $f(x)$  图象的一个对称中心为  $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ；

条件③：  $f(x)$  的图象经过点  $(\frac{5\pi}{6}, -1)$ 。

22. 已知函数  $f(x) = 2x^2 - x + k$  与  $h(x) = x^2 - x + k \ln x$  有相同的定义域。

(1) 解关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$ ；

(2) 若方程  $f(x) = 0$  有两个相异实数根  $x_1, x_2$  ( $0 < x_1 < x_2$ )，且  $h(x)$  在区间  $[x_1, x_2]$  上单调递减，证明：

$|h(x_1) - h(x_2)| < \frac{1}{4} - 2k$ 。(参考结论：  $\ln x < x - 1, x \in (0, 1)$ )

# 重庆育才中学高 2025 届高一上期末复习考试二

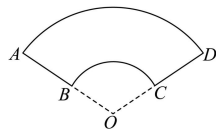
## 数 学

### 注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{a-2, a^2+4a, 12\}$ ，且  $-3 \in A$ ，则  $a$  等于  
A. -3 或 -1      B. -1      C. 3      D. -3
2. 已知角  $\alpha$  的终边与  $\frac{5\pi}{3}$  的终边重合，则  $\frac{\alpha}{3}$  的终边不可能在  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 已知  $p: (x+2)(x-3) < 0, q: |x-1| < 2$ ，则  $p$  是  $q$  的  
A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件
4. 如图是杭州 2022 年第 19 届亚运会会徽，名为“潮涌”，形象象征着新时代中国特色社会主义大潮的涌动和发展。如图是会徽的几何图形。设弧  $AD$  的长度是  $l_1$ ，弧  $BC$  的长度是  $l_2$ ，几何图形  $ABCD$  面积为  $S_1$ ，扇形  $BOC$  面积为  $S_2$ ，若  $\frac{l_1}{l_2} = 3$ ，则  $\frac{S_1}{S_2} =$   
A. 3      B. 4      C. 6      D. 8
5. 已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \cdot \sin x$  则函数  $f(x)$  的大致图象为



- A.
- B.
- C.
- D.

6. 若函数  $y = \log_{\frac{1}{3}}(ax^2 - 4x + 12)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递增，则实数  $a$  的取值范围

- A.  $(-1, 1]$       B.  $[-1, 1]$       C.  $(0, 1]$       D.  $[0, 1]$

7. 已知函数  $f(x) = |\sin \omega x|$  ( $\omega > 0$ ) 在区间  $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right]$  上单调递减，则实数  $\omega$  的取值范围为

- A.  $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$       B.  $\left(0, \frac{3}{2}\right]$       C.  $\left[\frac{8}{3}, 3\right]$       D.  $\left(0, \frac{5}{4}\right]$

8. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{|x+1|} + \sin\left[\pi\left(\frac{x}{2} + 2021\right)\right]$  ( $-4 \leq x \leq 2$  且  $x \neq -1$ )，则  $f(x)$  的所有零点之和为

- A.  $-8$       B.  $-6$       C.  $-4$       D.  $2$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列计算正确的是

- A.  $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (6)^0 - \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = -1$       B.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7} + \ln(\ln e) = 7$   
C.  $\log_2 3 \times \log_3 4 = \log_6 7$       D.  $\lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 - \lg 200 + \lg 2 = 0$

10. 若函数  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+ax-3}$  的图像经过点  $(3, 1)$ ，则

- A.  $a = -2$       B.  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减  
C.  $f(x)$  的最大值为 81      D.  $f(x)$  的最小值为  $\frac{1}{81}$

11. 已知函数  $f(x), g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，且  $f(2-x) + g(x) = 5$ ， $g(x+2) - f(x-2) = 7$ ，若函数  $y = g(x+2)$  为偶函数， $g(2) = 4$ ，则下列选项正确的是

- A.  $f(x)$  为偶函数      B.  $f(x)$  的图象关于点  $(-1, -1)$  对称  
C.  $f(x)$  的周期为 4      D.  $f(1) + f(2) + \cdots + f(2023) = -2023$

12. 已知函数  $f(x) = |\cos x| + \cos 2x$ ，则下列结论中正确的是

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$       B.  $f(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$  上单调递增  
C.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{4}$  对称      D.  $f(x)$  的值域为  $[-1, 2]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 幂函数  $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^{m^2 - 5m}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，则  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 若  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{1}{3}$ ，则  $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) =$  \_\_\_\_\_.

15. 设函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x^2) + \frac{1}{1+2|x|}$ ，则使得  $f(x) \leq f(2x-1)$  成立的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 2$ ，且  $a+b=1$ ，则  $\frac{ac}{b} + \frac{c}{ab} - 2c + \frac{\sqrt{2}}{c-2}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知集合  $A = \{x | m-1 \leq x \leq 2m+3\}$ ，不等式  $\frac{8}{x-1} < 1$  的解集为  $B$ .

(1) 当  $m=2$  时，求  $A \cup B$ ， $(C_R A) \cap B$ ；

(2) 若  $A \cap B = A$ ，求实数  $m$  的取值范围.

18. (12 分) 已知角  $\alpha$  满足  $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

(1) 求  $\tan \alpha$  的值；

(2) 若角  $\alpha$  是第三象限角， $f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha - \pi) \tan(5\pi + \alpha) \cos(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi - \alpha) \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$ ，求  $f(\alpha)$  的值.

19. (12 分) 已知函数  $f(x) = ax^2 - (a+2)x + 2$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 若对任意的  $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) \geq -\frac{1}{4}$  恒成立，求实数  $a$  的范围；

(2) 求关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  的解集.

20. (20 分) 已知函数  $f(x) = \log_a \frac{4^x + 1}{2^x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

(1) 试判断函数  $f(x)$  的奇偶性;

(2) 当  $a = 2$  时, 求函数  $f(x)$  的值域;

(3) 已知  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ , 若  $\forall x_1 \in [-4, 4], \exists x_2 \in [0, 4]$ , 使得  $f(x_1) - g(x_2) \geq 2$ , 求实数  $a$  的取值范围.

21. (12 分) 某同学用“五点法”画函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在某一周期内的图象时, 列表并填入的部分数据如表:

$x$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$x_1$	$x_2$	$\frac{10\pi}{3}$
$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin(\omega x + \varphi)$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	0	$\sqrt{3}$	0	$y_2$	0

(1) 请利用上表中的数据, 写出  $x_1$ 、 $y_2$  的值, 并求函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{2\pi}{3}$  个单位, 再把所得图象上各点的横坐标缩小为原来的  $\frac{1}{2}$ , 纵坐标不变, 得到函数  $g(x)$  的图象, 若  $|g(x) - m| < 2$  在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  上恒成立, 求实数  $m$  的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 若  $F(x) = g^2(x) + \frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot g(x) - 1$  在  $x \in (0, 2019\pi)$  上恰有奇数个零点, 求实数  $a$  与零点个数  $n$  的值.

22. (12 分) 对于函数  $f(x) = ax^2 + (1+b)x + b - 1$  ( $a \neq 0$ ), 存在实数  $x_0$ , 使  $f(x_0) = mx_0$  成立, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  关于参数  $m$  的不动点.

(1) 当  $a = 1, b = -2$  时, 求  $f(x)$  关于参数 1 的不动点;

(2) 当  $a = 1, b = 2$  时, 函数  $f(x)$  在  $x \in (0, 2]$  上存在两个关于参数  $m$  的相异的不动点, 试求参数  $m$  的取值范围;

(3) 对于任意的  $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 总存在  $b \in [2, 5]$ , 使得函数  $f(x)$  有关于参数  $m$  的两个相异的不动点, 试求  $m$  的取值范围.