



高 2025 届数学期末 复 习 题

姓名: _____

班级: _____

目录

第一章 集合与常用逻辑用语、不等式.....	2
第二章 函数.....	4
第三章 二次函数、幂函数、指数函数.....	6
第四章 对数、对数函数.....	8
第五章 三角函数概念、公式.....	10
第六章 三角函数性质.....	12
第七章 期末复习题一.....	14
第八章 期末复习题二.....	18

第一章 集合与常用逻辑用语、不等式

一、单选题

- 定义 $A \otimes B = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, m \in A, n \in B \right\}$, 若 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 4, 8\}$ 则 $A \otimes B$ 中元素个数为
A. 1 B. 2 C. 4 D. 5
- 若实数 a, b , 满足 $a < b < 0$, 实数 $m < 0$, 则下列不等式中一定成立的是
A. $a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}$ B. $mb^2 < ma^2$
C. $\frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}$ D. $\frac{2a+b}{a+2b} < \frac{a}{b}$
- 命题 P : 关于 x 的不等式 $ax^2 + ax - x - 1 < 0$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (-1, +\infty)$ $\left(\frac{1}{a} < -1\right)$ 的一个必要不充分条件是
A. $a \leq -1$ B. $a > 0$ C. $-2 < a < 0$ D. $a < -2$
- 集合 $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x \mid ax + 1 \leq 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是
A. $\left\{ a \mid -\frac{1}{3} \leq a < 1 \right\}$ B. $\left\{ a \mid -\frac{1}{3} \leq a \leq 1 \right\}$ C. $\{a \mid a < -1 \text{ 或 } a \geq 0\}$ D. $\left\{ a \mid -\frac{1}{3} \leq a < 0 \text{ 或 } 0 < a < 1 \right\}$
- 设正实数 x, y 满足 $x > \frac{1}{2}, y > 1$, 不等式 $\frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \geq m$ 恒成立, 则 m 的最大值为
A. 8 B. 16 C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

二、多选题

- 下面命题正确的是
A. “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的必要不充分条件
B. 命题“任意 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + x + 1 < 0$ ”的否定是“存在 $x \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”
C. “ $x \geq 6$ ”是“ $2^x \geq 32$ ”的充分不必要条件
D. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a \neq 0$ ”是“ $ab \neq 0$ ”的必要不充分条件
- 下列函数的最小值为 4 的有
A. $y = x^2 + \frac{4}{x^2}$ B. $y = \frac{1}{x-1} + x + 1 (x > 1)$
C. $y = \frac{x^2 + 10}{\sqrt{x^2 + 6}}$ D. $y = x + \frac{9}{x} - 2$
- 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y + xy - 3 = 0$, 则
A. xy 的范围 $(0, 1]$ B. $x + y$ 的范围是 $[2, 3]$
C. $x + 4y > 3$ D. $x + 2y$ 的最小值是 $4\sqrt{2} - 3$

三、填空题

9. 已知集合 $A = \{2, 3, 2a+1\}$, $B = \{a^2+a-4, a^2+1\}$, 且 $A \cap B = \{2\}$, 则实数 a 的值是_____.
10. 商品批发市场中, 某商品的定价每天随市场波动, 甲乙两名采购员在每月的同一天去该市场购买同一种商品, 甲每次购买 a 公斤, 乙每次购买 b 元 (a, b 互不相等), 该方案实施 2 次后_____的购买方案平均价格更低. (填“甲”或“乙”)
11. 已知正实数 a, b 满足 $2a+b=2$, 则 $(4a^2+1) \cdot (b^2+1)$ 的最小值为_____. $\frac{2a^2-b+4}{a+1} + \frac{b^2-2a-2}{b+4}$ 的最小值为_____.

四、解答题

12. 第 31 届世界大学生夏季运动会将于 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在四川成都举行, 某公司为了竞标配套活动的相关代言, 决定对旗下的某商品进行一次评估. 该商品原来每件售价为 25 元, 年销售 8 万件.
- (1) 据市场调查, 若价格每提高 1 元, 销售量将相应减少 2 000 件, 要使销售的总收入不低于原收入, 该商品每件定价最多为多少元?
- (2) 为了抓住此次契机, 扩大该商品的影响力, 提高年销售量, 公司决定立即对该商品进行全面技术革新和营销策略改革, 并提高定价到 x 元. 公司拟投入 $\frac{1}{6}(x^2 - 600)$ 万元作为技改费用, 投入 50 万元作为固定宣传费用, 投入 $\frac{x}{5}$ 万元作为浮动宣传费用. 试问: 当该商品改革后的销售量 a 至少应达到多少万件时, 才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和? 并求出此时商品的每件定价.

第二章 函数

一、单选题

1. 下列四组函数中，表示同一个函数的一组是

A. $y = |x|, u = \sqrt{v^2}$

B. $y = \sqrt{x^2}, s = (\sqrt{t})^2$

C. $y = \frac{x^2-1}{x-1}, m = n+1$

D. $y = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}, y = \sqrt{x^2-1}$

2. 已知函数 $y = f(2^x)$ 的定义域为 $[1, 4]$ ，则函数 $y = \frac{f(x+1)}{x-1}$ 的定义域为

A. $[-1, 1)$

B. $(1, 15]$

C. $[0, 3]$

D. $[0, 1) \cup (1, 3]$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2ax-9|, & x \leq 3 \\ (a-1)^{x-3}, & x > 3 \end{cases}$ ，且对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ， $x_1 \neq x_2$ ，都满足 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$ ，则实数 a 的取值范围是

A. $(1, 2)$

B. $\left(1, \frac{3}{2}\right]$

C. $\left(1, \frac{4}{3}\right]$

D. $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ 是偶函数， $f(x-1)$ 是奇函数，则

A. $f(0) = 0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

C. $f(1) = 0$

D. $f(3) = 0$

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(x) = \frac{1}{3}f(x+1)$ ，当 $x \in (-1, 0]$ 时， $f(x) = x(x+1)$ ，若对任意 $x \in (-\infty, m]$ ，都有 $f(x) \geq -\frac{81}{16}$ ，则实数 m 的取值范围是

A. $\left[-\infty, \frac{7}{3}\right]$

B. $\left[-\infty, \frac{11}{4}\right]$

C. $\left[-\infty, \frac{9}{4}\right]$

D. $(-\infty, 3]$

二、多选题

6. 下列函数中，满足对 $\forall x_1 < x_2 \in (0, +\infty)$ ，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的是

A. $f(x) = x^{-1}$

B. $f(x) = x^3$

C. $f(x) = \sqrt{x}$

D. $f(x) = e^{-x}$

7. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设 $x \in \mathbf{R}$ ，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y = [x]$ 称为高斯函数。例如：

$[-3.2] = -4$ ， $[2.3] = 2$ 。已知函数 $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2}$ ，则关于函数 $g(x) = [f(x)]$ 的叙述中正确的是

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数

C. $g(x)$ 是偶函数

D. $g(x)$ 的值域是 $\{-1, 0\}$

8. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \frac{2^x-1}{2^x+1} + 3$ ，函数 $g(x)$ 满足 $g(-x) + g(x) = 6$ 。则

A. $f(\lg 2022) + f\left(\lg \frac{1}{2022}\right) = 6$

B. 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(0,3)$ 对称

C. 若实数 a, b 满足 $f(a) + f(b) > 6$ ，则 $a+b > 0$

D. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ，则 $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = 6$

三、填空题

9. 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数， $f(x+1)$ 是偶函数，且当 $x \in (0,1]$ 时， $f(x) = -x(x-2)$ ，则 $f(2020) - f(2021) =$ _____.

10. 已知函数 $f(x) = x + \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ ，若不等式 $f(3^x - 9^x) + f(a \cdot 3^x - 2) < 0$ 对任意实数 x 恒成立，则 a 的取值范围为_____.

11. 已知正实数 a, b 满足 $a^3 - \frac{8}{(b+1)^3} = \frac{10}{b+1} - 5a$ ，则 $3a+2b$ 的最小值是_____.

四、解答题

12. 已知 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} ，对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ ，当 $x > 0$ 时， $f(x) > 1$ ， $f(-1) = 2$.

(1) 试判断 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的单调性，并证明；

(2) 解不等式： $f(3x^2 - 4x - 2) + 2f(x) > 4$.

第三章 二次函数、幂函数、指数函数

一、单选题：

1. 不等式 $3x^2 - 5x - 2 \leq 0$ 的解集是

- A. $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$ B. $\left[-2, \frac{1}{3}\right]$ C. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup [2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

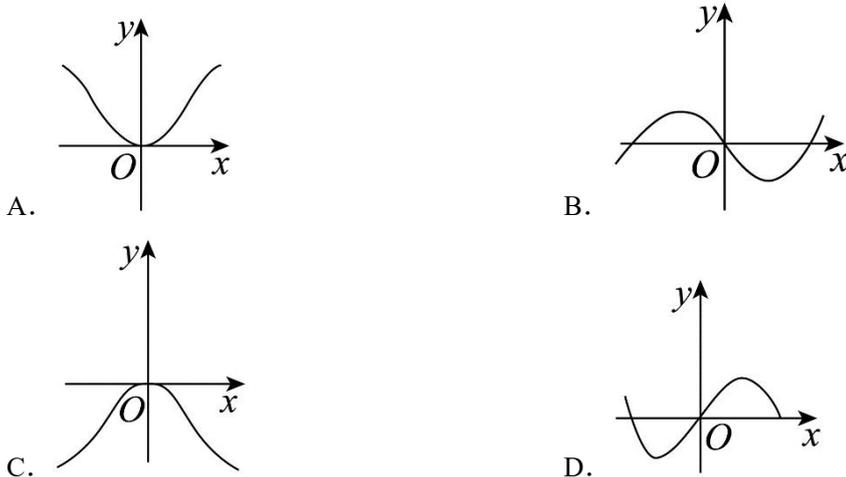
2. 式子 $\frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt[3]{m^4}}{\sqrt[6]{m^5}} (m > 0)$ 的计算结果为

- A. 1 B. $m^{\frac{1}{20}}$ C. $m^{\frac{5}{12}}$ D. m

3. “幂函数 $f(x) = (m^2 + m - 1)x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数”是“函数 $g(x) = 2^x - m^2 \cdot 2^{-x}$ 为奇函数”的 () 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充分必要 D. 既不充分也不必要

4. 函数 $f(x) = x\left(\frac{2}{1+2^x} - 1\right)$ 的图象大致为



5. 已知函数 $f(x)$ 既是二次函数又是幂函数，函数 $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ ，函数 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)+2} + 2$ ，则

$h(20) + h(19) + \dots + h(1) + h(0) + h(-1) + \dots + h(-19) + h(-20)$ 的值为

- A. 0 B. 20 C. 80 D. 82

二、多选题

6. 已知函数 $y = ax^2 + bx - 3$ ，则下列结论正确的是

- A. 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - 3 < 0$ 的解集可以是 $\{x | x > 3\}$
 B. 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - 3 > 0$ 的解集可以是 \emptyset
 C. 函数 $y = ax^2 + bx - 3$ 的图象与 x 轴正半轴可以有两个交点
 D. “关于 x 的方程 $ax^2 + bx - 3 = 0$ 有一个正根和一个负根”的充要条件是“ $a > 0$ ”

7. 若函数 $y = a^x - (b+1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像过第一、三、四象限，则必有

- A. $0 < a < 1$ B. $a > 1$ C. $b > 0$ D. $b < 0$

8. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设 $x \in \mathbf{R}$ ，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y = [x]$ 称为高斯函数，例如： $[-3.5] = -4$ ， $[2.1] = 2$ 。已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2}$ ，则关于函数 $g(x) = [f(x)]$ 的叙述中正确的是

- A. $g(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 是奇函数
 C. $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数 D. $g(x)$ 的值域是 $\{-1, 0, 1\}$

三、填空题

9. 设关于 x 的不等式 $ax^2 + 8(a+1)x + 7a + 16 \geq 0$, ($a \in \mathbf{Z}$)，只有有限个整数解，且 0 是其中一个解，则全部不等式的非负整数解的和为_____.

10. 设 $b \in \mathbf{R}$ ，若函数 $f(x) = 9^x - 3^{x+1} + b$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 3，则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是_____.

11. 已知幂函数 $y = x^{m^2 - 2m - 3}$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 的图象关于 y 轴对称，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，则满足 $(a+1)^{\frac{m}{3}} < (3-2a)^{\frac{m}{3}}$ 的 a 的取值范围为_____.

四、解答题

12. 已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x - 2^{1-x}$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

- (1) 求实数 a 的值；
 (2) 求不等式 $f(f(x) - 2) > 3$ 的解集；
 (3) 若关于 x 的不等式 $f(x) > \frac{k}{2^{x-1}} + 2$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

第四章 对数、对数函数

一、单选题

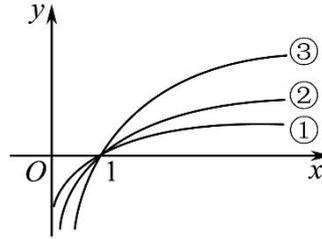
1. 函数 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_5 x$, $h(x) = \lg x$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 的图象所对应的编号依次为

A. ①②③

B. ③①②

C. ③②①

D. ①③②



2. 设 $a = \log_{\frac{1}{5}} 3$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 5$, $c = (\frac{1}{5})^{0.3}$, 则

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $b < a < c$

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 3)$, 则函数 $g(x) = \frac{f(1+x)}{\ln(1-x)}$ 的定义域为

A. $(-2, 1)$

B. $(-2, 0) \cup (0, 1)$

C. $(0, 1)$

D. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

4. 已知 x, y 满足 $x + \ln x + 2 = 0$, $\ln(1-y) - y + 3 = 0$, 其中 e 是自然对数的底数, 则 $x+y$ 的值为

A. $-e$

B. 1

C. $\frac{1}{e}$

D. $-e^4$

5. 已知函数 $f(x) = 2022^x + \log_{2022}(\sqrt{x^2+1} + x) - 2022^{-x} + 1011$, 则关于 x 的不等式 $f(4x+1) + f(2x+1) - 2022 < 0$ 的解集为

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-\infty, -\frac{1}{3})$

C. $(-\infty, -\frac{2}{3})$

D. $(-\infty, 1011)$

二、多选题

6. 对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), 当 $f(x) = \lg x$ 时, 下述结论中正确的是

A. $f(0) = 1$

B. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

C. $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

D. $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

7. 下列命题正确的是

A. 函数 $y = \sqrt{1 - \log_2(1-x)}$ 的定义域为 $[-1, 1)$

B. 函数 $f(x) = \log_2 x + \log_2(4-x)$ 的最大值为 2

C. 若 $(\frac{1}{2})^a = 3^b = m$, 且 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$, 则 $m = \sqrt{6}$

D. 函数 $y = 2\cos^2 x + 2\sin x - 1$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$

8. 关于函数 $f(x) = \lg \frac{x^2+1}{|x|}$ ($x \neq 0$)，下列结论正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
- B. 函数 $f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$
- C. 当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 是增函数；当 $x < 0$ 时， $f(x)$ 是减函数
- D. 函数 $y = f(x) - m$ 的所有零点之和为 0

三、填空题

9. 计算： $\log_3 \frac{\sqrt[4]{27}}{3} + \lg 25 + \lg 4 + 7^{\log_7 2} =$ _____.

10. 已知函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 是奇函数，当 $x > 0$ 时，函数 $f(x)$ 的图像与函数 $y = \log_2 x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称，则 $g(-1) =$ _____.

11. 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 9)$, $g(x) = m \cdot 4^x + 2^{x+1}$ ($m < 0$). 若 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $\exists x_2 \in [1, 2]$ 使得 $f(x_1) + g(x_2) > 6$ 成立，则 m 的范围是 _____.

四、解答题

12. 函数 $f(x) = \lg(a \cdot 9^x + 3^x - 1)$.

(1) 如果 $x \in (0, 1)$ 时， $f(x)$ 有意义，求实数 a 的取值范围；

(2) 当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 值域为 \mathbb{R} ，求实数 a 的值；

(3) 在(2)条件下， $g(x)$ 为定义域为 \mathbb{R} 的奇函数，且 $x > 0$ 时， $g(x) = 10^{f(x)} + 1$. 解关于 x 的不等式 $g(x^2 + tx - 2t) \geq \frac{g^3(x)}{|g(x)|}$.

第五章 三角函数概念、公式

一、单选题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，下列等式一定成立的是

- A. $\sin(A+B) = -\sin C$ B. $\cos(A+B) = \cos C$
 C. $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$ D. $\sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$

2. 已知角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(-\frac{1}{3}, m\right)$ ，则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\pm \frac{1}{3}$

3. 若 α 为任意角，则满足 $\cos\left(\alpha + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$ 的一个 k 的值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 《掷铁饼者》取材于希腊的现实生活中的体育竞技活动，刻画的是一名强健的男子在掷铁饼过程中具有表现力的瞬间（如图）。现在把掷铁饼者张开的双臂近似看成一张拉满弦的“弓”，掷铁饼者的手臂长约为 $\frac{\pi}{4}$ m，肩宽约为 $\frac{\pi}{8}$ m，“弓”所在圆的半径约为 $\frac{5}{4}$ m，则掷铁饼者双手之间的距离约为（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）

- A. 1.012m B. 1.768m C. 2.043m D. 2.945m

5. （2022·四川省成都市新都一中高一期中（理））已知 $f(x) = x^2 - (a+1)x + \left(2a + \frac{1}{2}\right)$ ，

$f(\sin \theta) = f(\cos \theta) = 0$ ，且 $\sin \theta \neq \cos \theta$ ，设 $\lambda = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ，则 $\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$ 的值为

- A. $\frac{5}{2} - 2\sqrt{2}$ B. $5 - 4\sqrt{2}$ C. $\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}$ D. $2 + \sqrt{2}$



二、多选题

6. 已知 $\theta \in (0, \pi)$ ， $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则下列结论正确的是

- A. $\sin \theta \cos \theta < 0$ B. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ C. $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，下列等式一定成立的是

- A. $\sin \frac{A+B}{2} = -\cos \frac{C}{2}$ B. $\sin(2A+2B) = -\cos 2C$
 C. $\tan(A+B) = -\tan C$ D. $\sin(A+B) = \sin C$

8. 定义：角 θ 与 φ 都是任意角，若满足 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ，则称 θ 与 φ “广义互余”。已知 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{4}$ ，则下列角 β 中，可能与角 α “广义互余”的是

- A. $\sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ B. $\cos(\pi + \beta) = \frac{1}{4}$ C. $\tan \beta = \sqrt{15}$ D. $\tan \beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$

三、填空题

9. 已知函数 $f(x) = ax^3 + b\sin x + 2 (ab \neq 0)$ ，若 $f(2019) = k$ ，则 $f(-2019) = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 若 $\tan^2 \alpha = 2 \tan^2 \beta + 1$ ，则 $2\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 已知角 α 为第一象限角，其终边上一点 $P(x, y)$ 满足 $2\ln(2x - y) = \ln(x^2 + y^2)$ ，则 $2\cos \alpha - \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

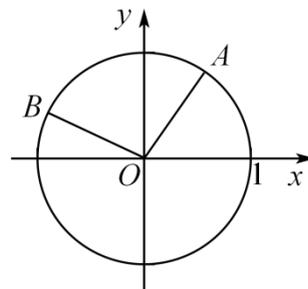
四、解答题

12. (1) 已知 $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ ，求 $\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3$ 的值
- (2) 已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，当 $0 < \theta < \pi$ 时，求 $\tan \theta$ 的值.

13. 如图，锐角 α 和钝角 β 的终边分别与单位圆交于 A, B 两点，且 $OA \perp OB$.

(1) 求 $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \beta) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ 的值；

(2) 若点 A 的横坐标为 $\frac{3}{5}$ ，求 $2\sin \alpha \cos \beta$ 的值.



第六章 三角函数性质

一、单选题

1. 函数 $f(x)$ 的图象是中心对称图形，如果它的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ，那么 $f(x)$ 的解析式可以是

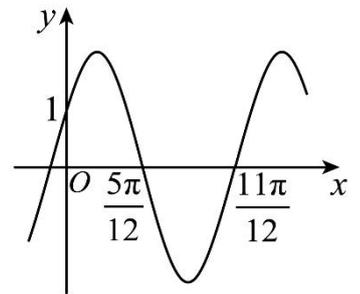
- A. $\sin x$ B. $\cos x$ C. $\sin x + 1$ D. $\cos x + 1$

2. 已知函数 $f(x) = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，函数 $g(x)$ 的图象由 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到，则下列关于函数 $g(x)$ 的图象说法正确的是

- A. 关于 y 轴对称 B. 关于原点对称
C. 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称 D. 关于点 $(\frac{5\pi}{36}, 0)$ 对称

3. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x) =$

- A. $2\cos 2x$ B. $\sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
C. $\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ D. $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$



4. “ $\sin x_0 = 0$ ”是“函数 $y = \tan x$ 的图像关于 $(x_0, 0)$ 中心对称”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数，其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 对称，且在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数，则 ω 和 φ 的值分别为

- A. $\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}$ B. $2, \frac{\pi}{3}$ C. $2, \frac{\pi}{2}$ D. $\frac{10}{3}, \frac{\pi}{2}$

二、多选题

6. 下列不等式成立的是

- A. $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) < \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ B. $\cos 400^\circ > \cos(-50^\circ)$
C. $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) < \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ D. $\sin 3 < \sin 2$

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ ，下列选项中正确的是

- A. $f(x)$ 的最小值为 -2 B. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增
C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ 中心对称 D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上值域为 $[\sqrt{2} + 1, 3]$

8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\omega \in (0, 2)$, 将函数 $f(x)$ 图象上的所有点的纵坐标保持不变, 横坐标缩短为原来的一半得到函数 $g(x)$, 且不等式 $g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则下列说法正确的是

- A. $\omega = 1$ B. $\frac{3}{4}\pi$ 为 $g(x)$ 的一个零点
 C. $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增 D. 方程 $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 在 $x \in (0, 10\pi)$ 上共有 30 个解

三、填空题

9. 若函数 $f(x) = 2\sin\left(3\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则 ω 的值为_____.

10. 函数 $f(x) = 2\sin^2 x - 3\cos x - 1$ 的最大值为_____.

11. 在函数 $f(x) = \sin(2x - \varphi)$ ($\varphi > 0$) 图象与 x 轴的所有交点中, 点 $\left(\frac{\varphi}{2}, 0\right)$ 离原点最近, 则 φ 可以等于_____ (写出一个值即可).

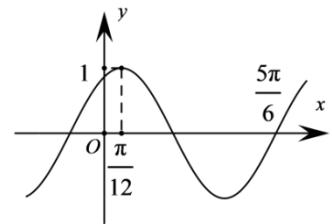
四、解答题

12. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $[f(x)]^2 - mf(x) - 1 \leq 0$, 求 m 的取值范围;

(3) 求实数 a 和正整数 n , 使得函数 $F(x) = f(x) - a$ 在 $[0, n\pi]$ 上恰有 2021 个零点.



重庆育才中学高 2025 届高一上期末复习考试一

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | (x+2)(x-1) \leq 0\}$, $N = \{x | \log_2 x \leq 1\}$, 则 $M \cup N =$

- A. $(0,1]$ B. $[-2,2]$ C. $[-2,1]$ D. $(-\infty,2]$

2. 命题“ $\forall x > 0, \sin x \leq 1$ ”的否定是

- A. $\forall x > 0, \sin x > 1$ B. $\forall x \leq 0, \sin x > 1$
C. $\exists x > 0, \sin x > 1$ D. $\exists x \leq 0, \sin x > 1$

3. 已知角 α 的终边经过点 $P(-8, m)$, 且 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 则 $\cos \alpha$ 的值是

- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

4. 我国的 5G 通信技术领先世界, 5G 技术的数学原理之一是著名的香农 (Shannon) 公式, 香农提出并严格证明了“在被高斯白噪声干扰的信道中, 计算最大信息传送速率 C 的公式 $C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$, 其中 W 是信道带宽 (赫兹), S 是信道内所传信号的平均功率 (瓦), N 是信道内部的高斯噪声功率 (瓦), 其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 根据此公式, 在不改变 W 的前提下, 将信噪比从 99 提升至 λ , 使得 C 大约增加了 60%, 则 λ 的值大约为 () (参考数据: $10^{0.2} \approx 1.58$)

- A. 1559 B. 3943 C. 1579 D. 2512

5. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 且 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$, 则 $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$

- A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ B. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\pm \frac{\sqrt{15}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知 $a = \left(\frac{8}{27} \right)^{\frac{1}{3}}$, $b = \tan \frac{3}{2}$, $c = \frac{18}{4 \log_5 6 + 9 \log_6 5}$, 则

- A. $a > c > b$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $b > a > c$

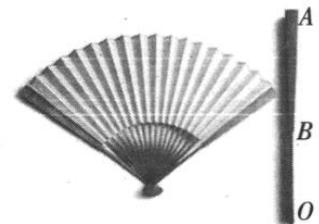
7. 已知函数 $f(x) = \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$ (其中 $\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围为

- A. $(0,1]$ B. $(0,2]$ C. $[1,2]$ D. $(1,2)$

8. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 恒有 $f(x-1)=f(x+1)$ ，当 $x \in [0,1)$ 时， $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ ，已知 $k \in \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{18}\right)$ ，则函数 $g(x)=f(x)-kx-\frac{1}{3}$ 在 $(-1,6)$ 上的零点个数为
- A. 4 个 B. 5 个 C. 3 个或 4 个 D. 4 个或 5 个

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列叙述中正确的是
- A. 若 $1 \leq a \leq 5$ ， $-1 \leq b \leq 2$ ，则 $-1 \leq a-2b \leq 7$ B. 若 $\log_3 x = \frac{1}{2}$ ，则 $x = \sqrt{3}$
- C. 函数 $y = 4^x + 2^x + 1$ 的值域为 $(1, +\infty)$ D. 已知 $a, b \in R$ ，则“ $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$ ”是“ $a < b < 0$ ”的充分不必要条件
10. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 条对称轴，则下列四个结论正确的是
- A. $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点 B. $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$
- C. ω 的取值范围是 $\left[\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$ D. $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增
11. 若 $a > b > 0$ ，且 $a+b=1$ ，则
- A. $a \ln b > b \ln a$ B. $\frac{2}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{2}$ C. $(a^2+1)(b^2+1) < \frac{3}{2}$ D. $\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{4}$
12. 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义，由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用.在混沌理论中，函数的周期点是一个关键概念，定义如下：设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，对于 $x_0 \in R$ ，令 $x_n = f(x_{n-1})$ ($n=1,2,3,\dots$)，若存在正整数 k 使得 $x_k = x_0$ ，且当 $0 < j < k$ 时， $x_j \neq x_0$ ，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为 k 的周期点.给出下列四个结论正确的是
- A. 若 $f(x) = e^{x-1}$ ，则 $f(x)$ 存在唯一一个周期为 1 的周期点；
- B. 若 $f(x) = 2(1-x)$ ，则 $f(x)$ 存在周期为 2 的周期点；
- C. 若 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 不存在周期为 3 的周期点；
- D. 若 $f(x) = x(1-x)$ ，则对任意正整数 n ， $\frac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的周期为 n 的周期点.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 折扇是一种用竹木做扇骨，韧纸或绫绢做扇面的能折叠的扇子.用时须展开，成扇形，聚头散尾.如图，某折扇的扇骨长度 $OA = 15\text{cm}$ ，扇面长度 $AB = 10\text{cm}$ ，已知折扇展开所对圆心角的弧度为 $\frac{3}{2}$ ，则扇面的面积为_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 满足：① $f(x+\pi)=-f(x)$ ；② $f(x)$ 最大值为 2；③ $f(x)$ 图像关于原点对称. 写出满足以上三个条件的函数 $f(x)$ 的一个解析式_____.

15. 已知 $\sin(\pi-\alpha)=2\cos\alpha$ ，则 $\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=$ _____.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq 2 \\ f(4-x), & 2 < x < 4 \end{cases}$ ，若当方程 $f(x)=m$ 有四个不等实根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) 时，不

等式 $kx_3 \cdot x_4 + x_1^2 + x_2^2 \geq k+11$ 恒成立，则实数 k 的最小值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 化简：
$$f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$$

(2) 已知角 α 的终边在直线 $y=-3x$ 上，求 $10\sin\alpha + \frac{3}{\cos\alpha}$ 的值.

18. 已知函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 在 $[1,2]$ 上最大值和最小值的和为 12，令 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{3}}$.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 并探究 $f(x)+f(1-x)$ 是否为定值，若是定值，写出证明过程；若不是定值，请说明理由；

(3) 解不等式： $f(1-x)+2f^2(x)<1$.

19. 已知定义在 $D=(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\forall x, y \in D$ ，有： $f(xy)=f(x)+f(y)$. 当 $x>1$ 时， $f(x)>0$.

(1) 证明： $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ ；(2) 若 $f(-2)=1$ ，解不等式： $f(1-2x)<-2$.

20. 2022年12月7日，国务院发布了精准防控新冠疫情的十条最新措施，以减轻疫情防控对企业经营和民众生活带来的损失。某公司为了尽快恢复经营活动，决定对业绩在50万元到200万元的业务员进行奖励，奖励方案遵循以下原则：奖金 y （单位：万元）随着业绩值 x （单位：万元）的增加而增加，但不超过业绩值的5%。

(1) 若某业务员的业绩为100万，核定可得5万元奖金，若该公司用函数 $y = \lg x + kx + 1$ （ k 为常数）作为奖励函数模型，则业绩200万元的业务员可以得到多少奖励？（参考数据 $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$ ）

(2) 若采用函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (a - 0.05)x + 100a - 8000$ ，求 a 的范围。

21. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ （ $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ），且 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，再从条件

①、条件②、条件③中选择两个作为一组已知条件。

(1) 确定 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上的最小值为 -2 ，求 a 的取值范围。

条件①： $f(x)$ 的最小值为 -2 ；

条件②： $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ；

条件③： $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{5\pi}{6}, -1)$ 。

22. 已知函数 $f(x) = 2x^2 - x + k$ 与 $h(x) = x^2 - x + k \ln x$ 有相同的定义域。

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ ；

(2) 若方程 $f(x) = 0$ 有两个相异实数根 x_1, x_2 （ $0 < x_1 < x_2$ ），且 $h(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调递减，证明：

$|h(x_1) - h(x_2)| < \frac{1}{4} - 2k$ 。（参考结论： $\ln x < x - 1, x \in (0, 1)$ ）

重庆育才中学高 2025 届高一上期末复习考试二

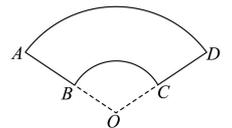
数 学

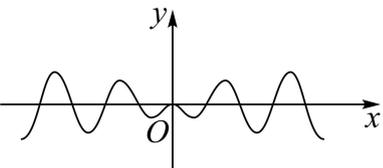
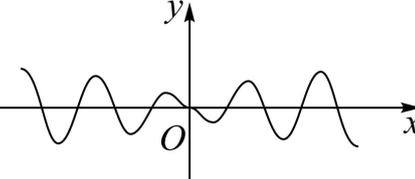
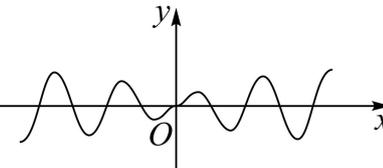
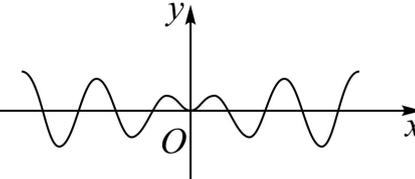
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{a-2, a^2+4a, 12\}$ ，且 $-3 \in A$ ，则 a 等于
 A. -3 或 -1 B. -1 C. 3 D. -3
2. 已知角 α 的终边与 $\frac{5\pi}{3}$ 的终边重合，则 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边不可能在
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知 $p: (x+2)(x-3) < 0, q: |x-1| < 2$ ，则 p 是 q 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 如图是杭州 2022 年第 19 届亚运会会徽，名为“潮涌”，形象象征着新时代中国特色社会主义大潮的涌动和发展。如图是会徽的几何图形。设弧 AD 的长度是 l_1 ，弧 BC 的长度是 l_2 ，几何图形 $ABCD$ 面积为 S_1 ，扇形 BOC 面积为 S_2 ，若 $\frac{l_1}{l_2} = 3$ ，则 $\frac{S_1}{S_2} =$
 A. 3 B. 4 C. 6 D. 8
5. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \cdot \sin x$ 则函数 $f(x)$ 的大致图象为



- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

6. 若函数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(ax^2 - 4x + 12)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围

- A. $(-1, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $(0, 1]$ D. $[0, 1]$

7. 已知函数 $f(x) = |\sin \omega x|$ ($\omega > 0$) 在区间 $[\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，则实数 ω 的取值范围为

- A. $[\frac{5}{2}, 3]$ B. $(0, \frac{3}{2}]$ C. $[\frac{8}{3}, 3]$ D. $(0, \frac{5}{4}]$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{|x+1|} + \sin\left[\pi\left(\frac{x}{2} + 2021\right)\right]$ ($-4 \leq x \leq 2$ 且 $x \neq -1$)，则 $f(x)$ 的所有零点之和为

- A. -8 B. -6 C. -4 D. 2

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列计算正确的是

- A. $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (6)^0 - \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = -1$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7} + \ln(\ln e) = 7$
 C. $\log_2 3 \times \log_3 4 = \log_6 7$ D. $\lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 - \lg 200 + \lg 2 = 0$

10. 若函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+ax-3}$ 的图像经过点 $(3, 1)$ ，则

- A. $a = -2$ B. $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减
 C. $f(x)$ 的最大值为 81 D. $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{81}$

11. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(2-x) + g(x) = 5$ ， $g(x+2) - f(x-2) = 7$ ，若函数 $y = g(x+2)$ 为偶函数， $g(2) = 4$ ，则下列选项正确的是

- A. $f(x)$ 为偶函数 B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, -1)$ 对称
 C. $f(x)$ 的周期为 4 D. $f(1) + f(2) + \dots + f(2023) = -2023$

12. 已知函数 $f(x) = |\cos x| + \cos 2x$ ，则下列结论中正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增
 C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称 D. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^{m^2 - 5m}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x^2) + \frac{1}{1+2|x|}$ ，则使得 $f(x) \leq f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是_____.

16. 已知 $a > 0, b > 0, c > 2$ ，且 $a + b = 1$ ，则 $\frac{ac}{b} + \frac{c}{ab} - 2c + \frac{\sqrt{2}}{c-2}$ 的最小值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知集合 $A = \{x | m-1 \leq x \leq 2m+3\}$ ，不等式 $\frac{8}{x-1} < 1$ 的解集为 B .

(1) 当 $m = 2$ 时，求 $A \cup B, (C_{\mathbb{R}}A) \cap B$;

(2) 若 $A \cap B = A$ ，求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 已知角 α 满足 $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 若角 α 是第三象限角， $f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha - \pi) \tan(5\pi + \alpha) \cos(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi - \alpha) \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$ ，求 $f(\alpha)$ 的值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + 2 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ 恒成立，求实数 a 的范围;

(2) 求关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集.

20. (20分) 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{4^x + 1}{2^x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(3) 已知 $g(x) = x - 2\sqrt{x}$, 若 $\forall x_1 \in [-4, 4], \exists x_2 \in [0, 4]$, 使得 $f(x_1) - g(x_2) \geq 2$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12分) 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一周期内的图象时, 列表并填入的部分数据如表:

据如表:

x	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	x_1	x_2	$\frac{10\pi}{3}$
$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\omega x + \varphi)$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	0	$\sqrt{3}$	0	y_2	0

(1) 请利用上表中的数据, 写出 x_1 、 y_2 的值, 并求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位, 再把所得图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $|g(x) - m| < 2$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $F(x) = g^2(x) + \frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot g(x) - 1$ 在 $x \in (0, 2019\pi)$ 上恰有奇数个零点, 求实数 a 与零点个数 n 的值.

22. (12分) 对于函数 $f(x) = ax^2 + (1+b)x + b - 1$ ($a \neq 0$), 存在实数 x_0 , 使 $f(x_0) = mx_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 关于参数 m 的不动点.

(1) 当 $a = 1, b = -2$ 时, 求 $f(x)$ 关于参数 1 的不动点;

(2) 当 $a = 1, b = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, 2]$ 上存在两个关于参数 m 的相异的不动点, 试求参数 m 的取值范围;

(3) 对于任意的 $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 总存在 $b \in [2, 5]$, 使得函数 $f(x)$ 有关于参数 m 的两个相异的不动点, 试求 m 的取值范围.