

重庆市育才中学校高 2025 届 2022-2023 学年（下）周末考试

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

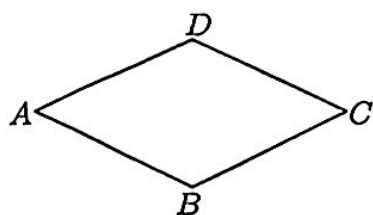
1. $\sin 70^\circ \sin 10^\circ + \cos 10^\circ \cos 70^\circ =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 α 是第四象限的角，则点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

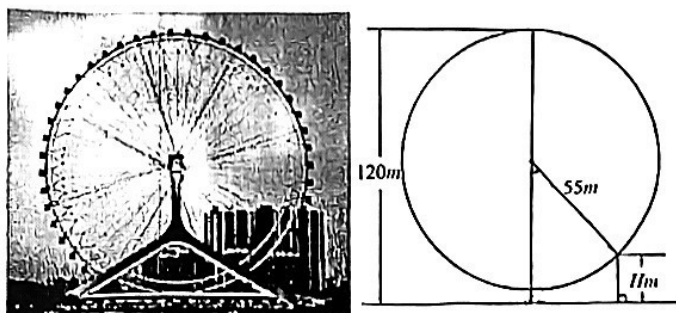
3. 如图，菱形 $ABCD$ 中，下列结论中正确的是



- A. $\overline{AB} = \overline{CD}$ B. $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{BD}$
C. $(\overline{AB} + \overline{AD}) \perp (\overline{AB} - \overline{AD})$ D. $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AB} - \overline{AD}|$

4. 如图，某摩天轮最高点距离地面高度为 120 m，转盘直径为 110 m，开启后按逆时针方向匀速旋转，旋转一周需要 30 min. 游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱，开始转动 t min 后距离地面的高度为 H m，则在转动一周的过程中，高度 H 关于时间 t 的函数解析式是

- A. $H = 55 \cos(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}) + 65 (0 \leq t \leq 30)$
B. $H = 55 \sin(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}) + 65 (0 \leq t \leq 30)$
C. $H = -55 \cos(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}) + 65 (0 \leq t \leq 30)$
D. $H = -55 \sin(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}) + 65 (0 \leq t \leq 30)$



5. 函数 $f(x) = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 的最大值为

- A. -3 B. -1 C. 1 D. $\frac{3}{2}$

6. 若 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\tan \theta = -3$, 则 $\frac{(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sqrt{2 + 2\cos 2\theta}} =$

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 上, 且满足 $\overline{BD} = \frac{1}{4}\overline{BC}$, 点 E 为 AD 上任意一点, 若实数 x, y 满足 $\overline{BE} = x\overline{BA} + y\overline{BC}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值为

- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $4 + 2\sqrt{3}$ D. $9 + 4\sqrt{2}$

8. 若角 α, β 满足 $2(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta)[\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)] = 1$, 则 α 的值可能为

- A. $-\frac{5\pi}{12}$ B. $-\frac{7\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

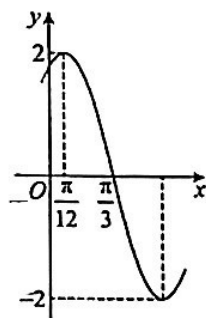
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是

- A. 若幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(3, \sqrt{3})$, 则 $f(9) = 3$
 B. 函数 $f(x) = x$ 与函数 $f(x) = \frac{x^2}{x}$ 表示同一个函数
 C. 若 $f(x) = x^2 + ax - a - 1 (a \in \mathbb{R})$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围为 $[2, +\infty)$
 D. 函数 $f(x) = 2^x - 3 + \log_1 x$ 的零点可能位于区间 $(1, 3)$ 上

10. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示, 下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称
 B. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称
 C. 将函数 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到函数 $f(x)$ 的图像
 D. 若方程 $f(x) = m$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是 $(-2, -\sqrt{3}]$



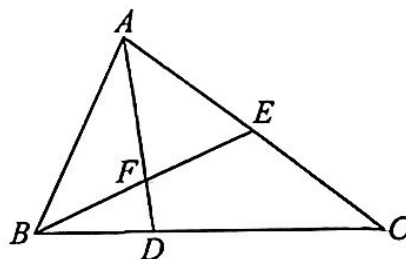
11. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, AD 与 BE 交于点 F , 则下列说法正确的是

A. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

B. $|\overrightarrow{BF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BE}|$

C. $S_{\triangle BFD} : S_{\triangle AFE} = 1:3$

D. $\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$



12. 已知函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$, 以下结论正确的是

A. 它是偶函数

B. 它是周期为 2π 的周期函数

C. 它的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$

D. 它在 $(-\pi, 2\pi)$ 这个区间有且只有 2 个零点

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线, 且 $3\vec{a} - \lambda\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a} - 2\vec{b}$ 共线, 则 $\lambda =$ _____.

14. 已知 $\sin \alpha - \sin \beta = -\frac{1}{3}$, $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.

15. $\log_2(1 + \tan 1^\circ) + \log_2(1 + \tan 2^\circ) + \log_2(1 + \tan 3^\circ) + \dots + \log_2(1 + \tan 45^\circ) =$ _____.

16. 函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 已知 $\left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = 3$ 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f\left(-\frac{\pi}{6} + x\right) + f\left(-\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$,

若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{5\pi}{36}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 上单调, 则 ω 的最大值为 _____.

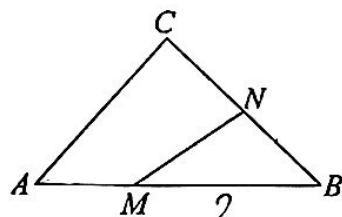
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

(1) 用 \vec{a}, \vec{b} 表示 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$;

(2) 若 P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. 求证: M, P, N 三点共线.



18. (12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上的单调递增区间;

(2) 若 $f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{3}$, 求 $\cos\left(2\beta - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

19. (12分)

已知 α 是三角形的一个内角,且 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 是方程 $5x^2-x+c=0$ 的两根.

(1) 求实数 c 的值;

(2) 求 $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$ 的值.

20. (12分)

已知函数 $f(x)=\cos^4x-\sin^4x-2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in\mathbb{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$,得到函数 $g(x)$ 的图象.求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的值域.

21. (12分)

已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足: $A+C=2B$, $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$,求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值.

22. (12分)

现有半径为30m,圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形空地 OPQ ,需要在此空地内修建一形状为平行四边形的体育活动场地 $ABCD$,其中点 D 在半径 OQ 上,点 A, B 在半径 OP 上,点 C 为弧 PQ 上的动点(如图所示),设 $\angle COP=\theta$.

(1) 用 θ 表示平行四边形 $ABCD$ 的面积 S ;

(2) 求 S 的最大值.

